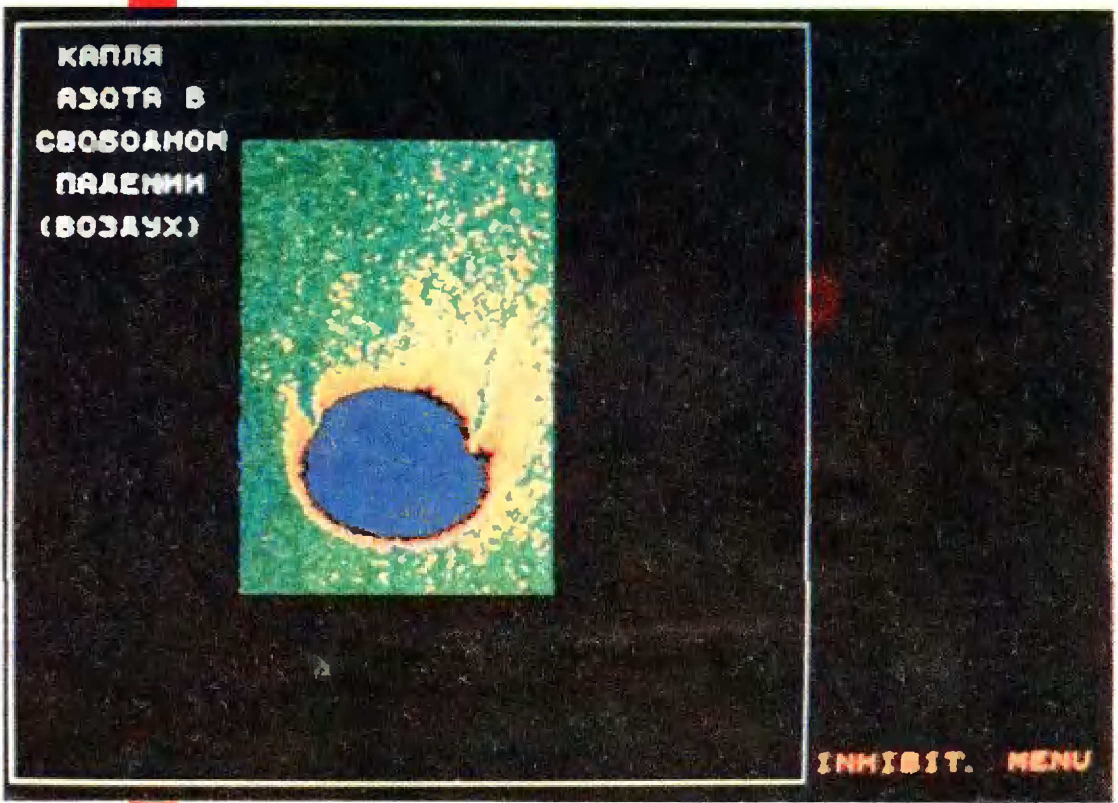
ISSN 0130-2221

Квант

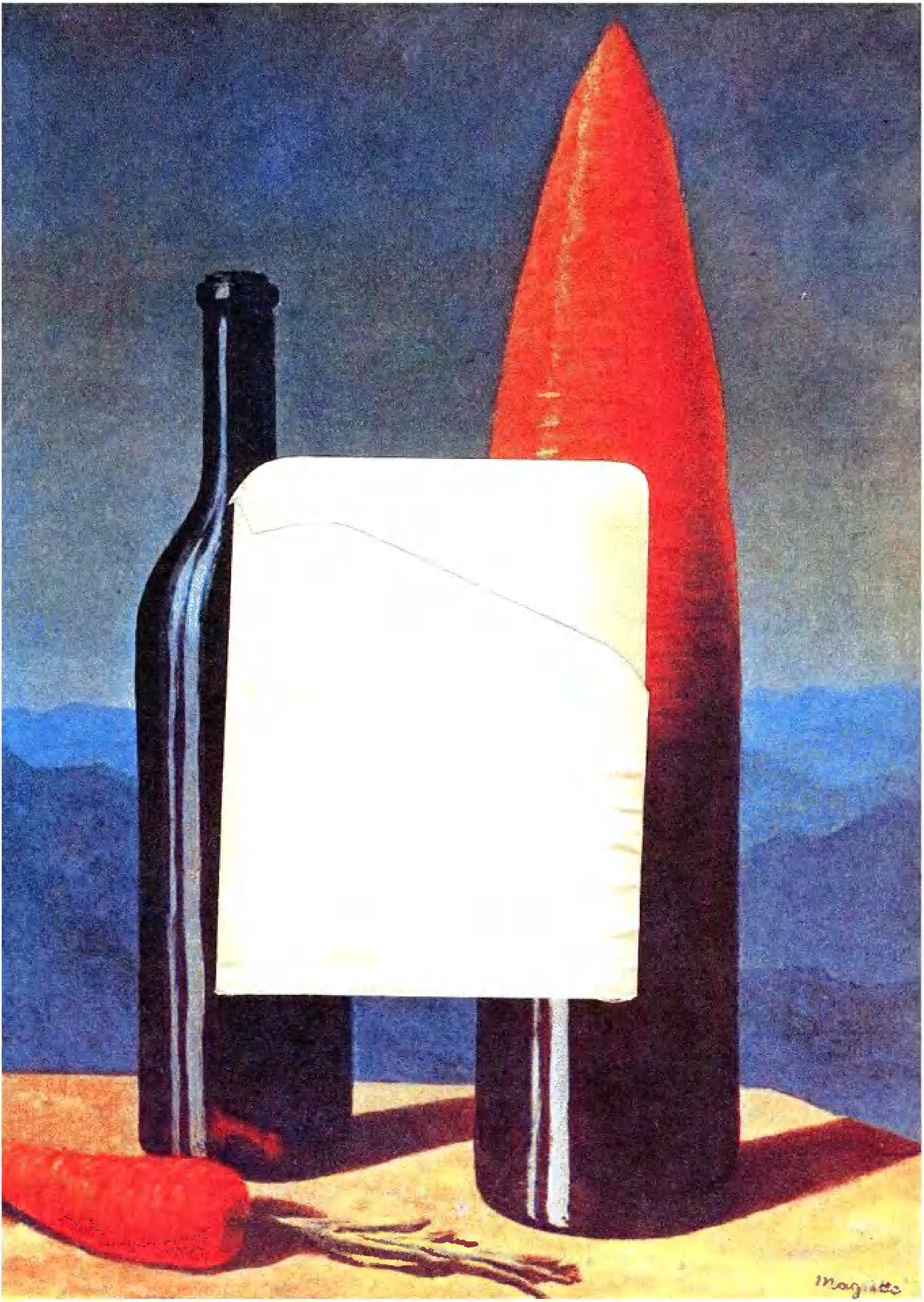
Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



История одного падения

1991


Magritte

Квант

2 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Фотография «одного падения», раскрашенная машиной по желанию экспериментатора (см. статью Л. Гурьяшкина и А. Стасенко).*

2 *Картина бельгийского художника Р. Магритта (1898—1967) наводит на размышления о возможности пересечения параллельных прямых. Об истории и существе неевклидовой геометрии, возникшей из подобных наблюдений, вы сможете прочитать в статье В. Болтянского «Загадка «аксиомы параллельных» в одном из следующих номеров.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Складная модель шара из двух систем параллельных колец.*

ИСТОРИЯ ОДНОГО ПАДЕНИЯ

Маленькая трагедия

Л. ГУРЬЯШКИН,
доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

> *... в души наши вы загляните, и что мы люди тоже, вас помнить прошу я, что, подобно всем на земле, живем мы и любим, и страдаем! Мысль пьесы сказал я; теперь судите, как она развита. Итак, мы начинаем!*
>
> Пролог из оперы Р. Леонкавалло «Паяцы»

Акт 1. Непростое рождение

Казалось бы, что может быть проще, чем сделать азотную каплю: налить жидкого азота в консервную баночку с маленьким отверстием — капли будут падать одна за другой, как вода из дырявой посуды. Попробовали — не тут-то было: азот выливался из отверстия сплошной струйкой, скользящей, как по маслу, по слою собственного пара, образующегося у стенок банки. Ведь эти стенки, первоначальная температура которых близка к комнатной ($T \approx 300$ К), воспринимались жидким азотом ($T' = 77$ К) как раскаленная печь. Можно было бы подождать, когда на внешней поверхности банки нарастет «шуба» из сконденсировавшихся паров воды и углекислого газа, содержащихся в воздухе,— но за это время утекло бы много азота; а чтоб не утекало, наверное, можно было бы придумать какой-нибудь клапан; а можно было бы... Но мы снабдили отверстие вертикальной трубочкой длиной около сантиметра (рис. 1) с пористым веществом, которое быстро принимало температуру жидкого азота и пропускало жидкий азот со скоростью приблизительно две капли в секунду.

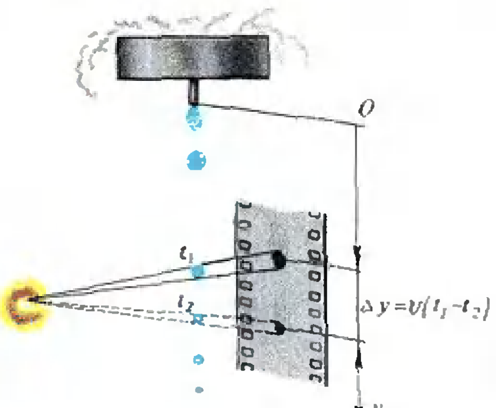


Рис. 1.

Эти капли с начальным диаметром порядка двух миллиметров, свободно падая в воздухе, пролетали мимо вертикально расположенной кассеты с фотопленкой и, освещаясь вспышками точечного источника света, оставляли на пленке теневую картину. Длительность вспышек была очень малой, около одной миллионной доли секунды, и потому картина получалась довольно четкой — за такое короткое время сама капля и картина обтекания ее изменялись очень мало.

На рисунке 2,*а* показана одна из многих полученных картин азотной капли, на рисунке 2,*б* — результат ее обработки в условных цветах на машине, которая умеет «раскрашивать» черно-белые фотографии по желанию экспериментатора. На этих рисунках хорошо виден след за каплей; он образуется благодаря резкому отличию плотностей окружающего воздуха и холодной массы газообразного азота, испарившегося с поверхности капли (аналогичный след можно видеть «на просвет» в стакане воды за куском растворяющегося сахара, опускаемого на краю ложки).

Проводились опыты и с каплями воды приблизительно такого же размера — никакого следа за каплей на пленке не оказалось. И понятно почему. Температуры воздуха и воды почти одинаковы и далеки от температуры кипения воды, так что скорость

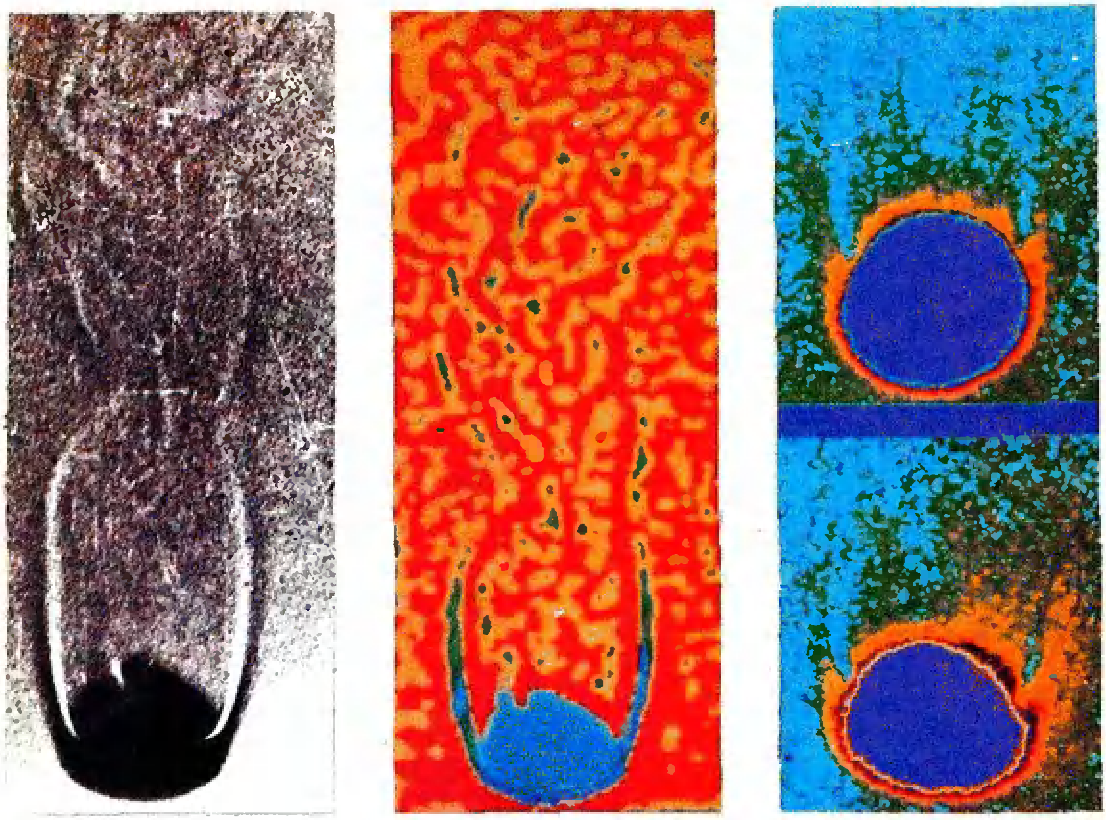


Рис. 2. а) б) в)

испарения водяной капли в комнатных условиях мала. А во влажном воздухе капля вообще не испаряется и даже может расти за счет конденсации (вспомните, как долго висят на деревьях и травах капли дождя или росы, а уж каплю воды на блюдце вы можете и специально понаблюдать). Обратим внимание еще и на то, что воздух для капли воды является «чужим» газом, а для азотной капли он «почти свой» (ведь основной компонент воздуха — азот).

Что же можно узнать о жизни азотной капли по ее «портрету»? Во-первых, «портрет» позволяет измерить размер капли (средний радиус r) и, следовательно, ее массу $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$ ($\rho_0 = 800$ кг/м^3 — плотность жидкого азота) и ее поверхность $s = 4\pi r^2$. Во-вторых, поскольку время Δt между вспышками известно, по сдвигу Δy последовательных изображений одной и той же капли (рис. 2,*в*) можно легко найти ее скорость $v = \Delta y / \Delta t$. А изменяя высоту капельницы, можно экспериментально найти изменение радиуса и скорости капли в процессе падения в зависимости от y: $r(y)$ и $v(y)$.

Результаты измерений показаны на рисунке 3 в виде кружочков. Виден характерный для всякого эксперимента разброс данных (для скорости v вычислена ошибка эксперимента и показана в виде горизонтальных отрезков). Измерения показали, что размер капли убывает монотонно, а скорость сначала растет, а затем, пройдя через максимальное значение, уменьшается.

Теперь дело за теоретическим осмыслением полученных результатов, которое позволит описать характерные периоды жизни падающей капли.

Акт 2. Безудержный разгон

Ясно, что сила сопротивления воздуха движущемуся телу как-то зависит от их относительной скорости.

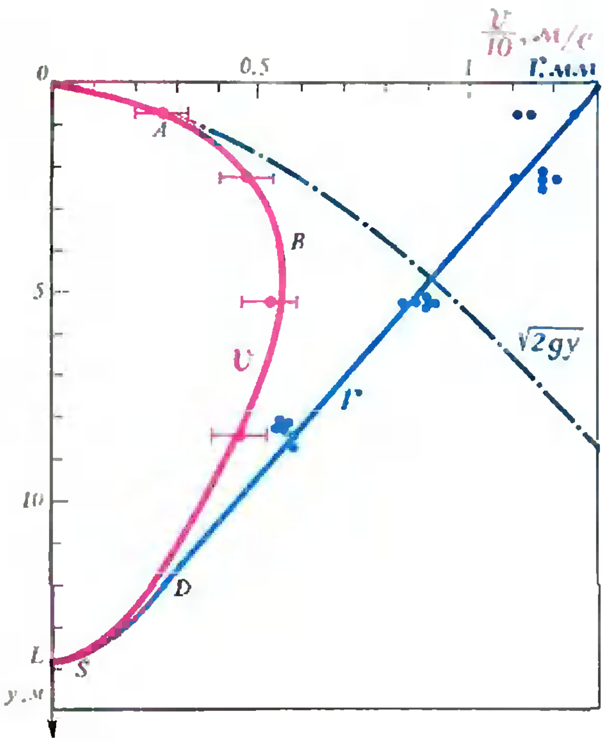


Рис. 3.

Во всяком случае, при нулевой скорости она равна нулю, а пока новорожденная капля движется еще медленно, силой сопротивления воздуха можно пренебречь. Тогда ее движение под действием только силы тяготения будет равноускоренным, а любой школьник знает про это движение все:

$$v^{(0)} = gt = \sqrt{2gy^{(0)}}, \quad y^{(0)} = \frac{gt^2}{2}.$$

Здесь верхний нуль как раз и означает приближенное рассмотрение при нулевой силе сопротивления. На рисунке 3 эта зависимость скорости от высоты показана штрихпунктирной линией, которая хорошо описывает экспериментальную кривую $v(y)$ на начальном участке OA.

Акт 3. Неизбежное торможение

По мере разгона капли сопротивление воздуха становится все ощутимее. Как описать эту силу?

Уж сколько раз твердили миру, что сила сопротивления воздуха движущемуся относительно него телу (аэродинамическая сила) пропорциональна плотности воздуха, квадрату размера тела (или площади его поперечного сечения) и квадрату скорости:

$$F_a = -C_a \rho \pi r^2 v^2.$$

Это утверждение можно получить, например, из соображений размерности. Здесь знак минус учитывает, что сила направлена в сторону, противоположную движению, а безразмерный коэффициент C_a, вообще говоря, зависит от скорости, но эта зависимость слабая и может быть получена из экспериментов или других более сложных теоретических соображений. А можно использовать и такие рассуждения. Поток массы воздуха внутри цилиндра с сечением, равным сечению πr^2 шаровой капли, равен $\rho v \pi r^2$(кг/с); но единица массы несет импульс (удельный импульс) $mv/m = v$, так что полный поток импульса в этом цилиндре равен $\rho v \pi r^2 v = \rho v^2 \pi r^2$(Н). Конечно, линии тока газа при обтекании капли как-то искривляются — вот и появляется какой-то множитель C_a, учитывающий все, что не учтено в этих рассуждениях.

Итак, с учетом этой аэродинамической силы уравнение движения капли (второй закон Ньютона) можно записать в виде

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho \pi r^2 v^2 C_a. \qquad (1)$$

А если обе части разделить на массу капли $m = 4/3\pi r^3 \rho_0$, получим

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{v^2}{r}, \qquad (2)$$

т. е. ускорение капли складывается из двух частей: ускорения силы тяжести g и отрицательного ускорения (торможения), связанного с аэродинамической силой.

Можно и по-другому записать последнее уравнение. Вспомним, что интервал времени dt можно получить делением пройденного пути dy на скорость движения v: $dt = dy/v$. Значит,

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

а ведь это есть изменение с расстоянием кинетической энергии единицы массы (или «удельной кинетической энергии» $v^2/2$).

Итак, уравнение (2) примет вид

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{v^2}{r(y)}\right) dy, \quad (3)$$

и уж, казалось бы, совсем просто его проинтегрировать. Но тут самое время вспомнить, что размер капли тоже изменяется с расстоянием; чтобы этого не забыть, мы даже написали $r(y)$ в правой части. Последнее уравнение можно прочесть так: изменение удельной кинетической энергии капли складывается из работы силы тяготения и работы силы сопротивления на элементарном перемещении dy.

Акт 4. Непрерывная самоотдача и вершина славы

Ясно, что радиус капли неотрицателен и не возрастает со временем. А это означает, что с ростом скорости и уменьшением $r(y)$ второе слагаемое в правой части уравнения (3) может сравняться по модулю с первым, и в этой точке пути скорость перестанет изменяться: $\frac{dv}{dy} = 0$. Эта точка отмечена буквой B на рисунке 3. Можно теперь определить значение коэффициента сопротивления C_a, оставшегося неизвестным при определении аэродинамической силы, методом теории размерностей:

$$0 = g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{v_B^2}{r_B} \Rightarrow C_a = \frac{4}{3} g \frac{\rho_0}{\rho} \frac{r_B}{v_B^2}.$$

Подставив значения $\rho_0 = 800$ кг/м^3, $\rho \approx 1$ кг/м^3, $g \approx 10$ м/с^2, а значения скорости и радиуса капли взяв по рисунку 3 — $r_B \approx 0{,}9$ мм $= 9 \cdot 10^{-4}$ м, $v_B \approx 5$ м/с, получим $C_a \approx 0{,}2$.

А что дальше, за точкой B? А дальше скорость капли должна падать, и ясно почему. Ведь сила тяжести пропорциональна массе капли, т. е. кубу ее радиуса ($\sim r^3$), а аэродинамическая сила — площади сечения капли, т. е. квадрату радиуса ($\sim r^2$), так что с уменьшением радиуса сила тяжести убывает быстрее, чем аэродинамическая. Таким образом, за точкой B капля тормозится, ее скорость уменьшается.

Теперь пора обсудить, как изменяется радиус капли. Прежде всего, причина его уменьшения совершенно ясна: тепло от обтекающего каплю воздуха идет на испарение ее верхних слоев. Запишем эту мысль.

Оценим подводимую к капле тепловую энергию. Поток массы воздуха, обтекающего каплю, — порядка $\rho v \pi r^2$ (кг/с). Это та масса воздуха, которая ежесекундно вступает в теплообмен с каплей. Каждая единица массы вещества несет энергию, состоящую из кинетической энергии хаотически движущихся молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Если считать окружающий воздух идеальным газом, то его удельная энергия равна c_pT (для идеального газа энергия взаимодействия его молекул равна нулю; индекс p у теплоемкости указывает на постоянство давления). Для газообразной массы, только что испарившейся с капли температуры T', удельная энергия равна c_pT'; в конденсированном состоянии (в жидкой капле) она равна $c_pT' - L(T')$, где $L(T')$ — удельная теплота испарения, в которую входит удельная потенциальная энергия взаимодействия молекул.

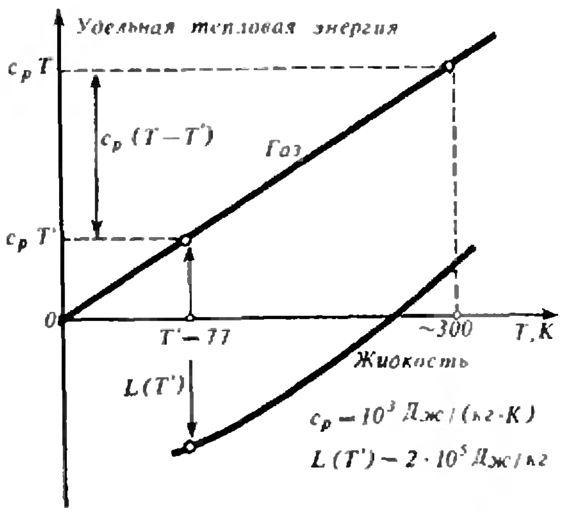


Рис. 4.

На рисунке 4 изображен качественный вид зависимости удельного «теплосодержания» от температуры для газообразного азота (прямая линия c_pT для идеального газа) и для жидкого азота (нижняя кривая). Их можно (если нужно) построить и количественно по табличным данным. Нам достаточно указанных на рисунке значений c_p и L, которые пригодятся для численных оценок.

Таким образом, за время dt к капле поступает тепловая энергия порядка $\rho v\pi r^2c_p(T-T')dt$. Эта энергия идет на испарение массы dm, что можно записать в виде

$$-Ldm=C_Q\rho v\pi r^2c_p(T-T')\,dt. \qquad (4)$$

Здесь та же история, что и с потоком импульса (аэродинамической силой F_a): мы ввели безразмерный коэффициент C_Q, точное значение которого мы не знаем и в который «спрятаны» более тонкие (но менее существенные для нас) детали процесса.

Подставив в уравнение (4) равенства $dt=dy/v$, $dm=4\pi r^2\rho_0dr$, получим

$$\frac{dr}{dy}=-\frac{C_Q}{4}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{c_p(T-T')}{L}. \qquad (5)$$

Таким образом, «скорость» изменения радиуса капли с расстоянием есть величина постоянная. Об этом и говорит прямая линия $r(y)$ на рисунке 3. Измерив ее наклон, из (5) можно найти безразмерный коэффициент C_Q. Собственно, для того ведь и нужен этот эксперимент — чтобы уточнить наши теоретические соображения; иначе обошлись бы и без него! Сплошные кривые $r(y)$ и $v(y)$ на рисунке 3 как раз и получены из условий наилучшего совпадения экспериментов с расчетами.

Акт 5. Жизнь ползком

Однако приведенные выше уравнения описывают динамику и тепло- и массообмен капли хотя и на большой части ее траектории, но не на всей. Начиная с некоторой точки (обозначим ее D), законы жизни капли изменяются. Дальнейшее ее жизнеописание тоже можно было бы провести довольно подробно, даже точнее, чем ранее, но это потребовало бы введения непростых понятий коэффициентов вязкости μ и теплопроводности λ. А можно было бы этот участок и вообще обойти молчанием, сославшись на то, что в жизни героев должны быть и таинственные периоды. Поэтому в порядке компромисса сделаем лишь набросок основных вех этого периода.

Самое существенное заключается в том, что после точки D капля становится столь малой и легкой, что величина $m\frac{dv}{dt}$ в левой части уравнения (1) перестает играть заметную роль, а сила тяжести mg уравновешивается силой сопротивления воздуха. Но и последняя тоже становится другой. Она уже пропорциональна первой степени радиуса и скорости и еще одной величине, именуемой коэффициентом вязкости; эта новая сила $F_\mu=6\pi\mu rv$ называется силой Стокса, а движение капли называется ползущим, потому что напоминает медленное оседание дробинки в густом меде.

Итак, после точки D

$$0=-6\pi\mu rv+mg,$$

откуда

$$v=\frac{2}{9}\,\frac{\rho_0g}{\mu}\,r^2. \qquad (6)$$

Тут сто́ит еще раз остановиться и задуматься. Ведь, судя по рисунку 3, скорость капли продолжает уменьшаться, так что $\frac{dv}{dy}\neq0$ и $\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dy}\neq0$; и масса еще не равна нулю, а мы написали «нуль» вместо $m\frac{dv}{dt}$. Что это значит?

Вспомним, что, размахнувшись, можно сравнительно далеко бросить камешек, но тополиный пух при том же размахе руки улетит совсем недалеко: пушинка тут же затормозится, ее скорость станет равной нулю (если воздух совершенно спокоен). Физик скажет при этом, что время релаксации, или «привыкания» скорости пушинки к скорости воздуха, мало, и это связано с малостью ее массы — меры ее инертности. А порыв ветра мгновенно унесет эту пушинку, в то время как для разгона парусной яхты потребуется определенное время (время релаксации). Так и наша капля, став достаточно малой, очень «быстро привыкает» к изменяющимся условиям обтекания, почти без запаздывания «следит» за ними (а они изменяются только за счет уменьшения ее массы, иначе установилась бы постоянная скорость падения). Все эти слова и поясняют, почему инертные свойства капли в конце ее траектории становятся несущественными, что и позволило написать «нуль» вместо $m\frac{dv}{dt}$.

После точки D подвод тепла к капле будет определяться в основном процессом теплопроводности. При этом за время dt капля будет получать тепловую энергию порядка $4\pi r^2\lambda\frac{T-T'}{r}\,dt$, и за счет этого тепла будет испаряться масса dm, т. е.

$$-L\frac{dm}{dt}\sim 4\pi r^2\lambda\frac{T-T'}{r},$$

откуда

$$r\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right)=-\frac{\lambda(T-T')}{L\rho_0}(=\mathrm{const}),$$

$$r_D^2-r^2\sim t-t_D.$$

Этот закон, согласно которому площадь поверхности испаряющейся капли убывает пропорционально времени, был установлен русским ученым Б. И. Срезневским (1883 г.) на основе теории размерностей и многочисленных экспериментов с неподвижными каплями различных веществ (см. также задачу Ф1221 в «Кванте» № 7 за 1990 г.). Сравнивая полученное уравнение с (6), видим, что теперь скорость капли убывает со временем линейно, а значит, координата капли — квадратично, как и при равнозамедленном движении, и $v\sim\sqrt{y_L-y}$, где y_L — точка полного испарения (если бы движение происходило и далее по этому закону). Но тогда $r\sim\sqrt[4]{y_L-y}$.

Стоп, скажет вдумчивый читатель, но ведь скорость капли и в начальный момент должна равняться нулю, а мы во втором акте этого почему-то не учли? И правильно сделали — ответим мы, так как в момент отрыва от капельницы скорость капли уже не нулевая, а размер столь велик, что режим ползущего движения в воздухе не наблюдается с самого первого мгновения ее рождения. Кроме того, остается тонкий вопрос о влиянии близости самой капельницы (ведь в наших рассуждениях мы всюду мыслим все тела удаленными «на бесконечность» от изолированной капли).

Акт 6. Последняя микросекунда

И вот наступает такой момент в жизни капли, когда ее размер становится равным, а затем и меньше длины свободного пробега молекул воздуха (между столкновениями друг с другом) $l\approx10^{-7}$ м. Это значит, что капля находится уже в условиях не сплошной, а разреженной среды, и законы жизни капли изменяются. А сколько времени остается жить капле?

Теперь на единицу поверхности в единицу времени падает приблизительно $1/6n\langle u\rangle$ молекул воздуха (n — плотность молекул, $\langle u\rangle=\sqrt{8RT/\pi M}$ — их средняя тепловая скорость). Каждая молекула приносит энергию порядка $3/2kT$ (точнее $5/2kT$, если учесть, что воздух состоит из двухатомных молекул; но это не важно для оценки порядка величины). На всю сферическую поверхность капли, таким образом, в единицу времени приходит энергия

$$4\pi r^2\frac{1}{6}\rho\langle u\rangle\frac{5RT}{2M}.$$

Приравняв по порядку эту энергию величине

$$-L\frac{dm}{dt}=-L4\pi r^2\rho_0\frac{dr}{dt},$$

получим приближенное соотношение

$$\frac{dr}{dt}\approx-\frac{5}{2}\frac{RT\rho\langle u\rangle}{L\rho_0 6M}.$$

Правда, часть энергии уносится с испаряющейся массой, а значение удельной теплоты испарения, которое приводится в справочниках, надо бы уменьшить на удельную величину работы против сил давления сплошной среды, которой теперь нет; но эти две тонкости не повлияют на порядок искомой величины времени τ_s. Видно, что скорость испарения постоянна; значит, r уменьшается линейно по времени и

$$\frac{dr}{dt}=\frac{r_s}{\tau_s}=\frac{l}{\tau_s},$$

где r_s — это начальное значение радиуса капли на рассматриваемом этапе ее жизни в условиях разреженного газа. Отсюда время исчезновения капли ($r\to 0$) имеет порядок

$$\tau_s\sim\frac{r_s}{\frac{5}{12}\frac{RT}{LM}\frac{\rho}{\rho_0}\langle u\rangle}.$$

Подставив $r_s=l\approx 10^{-7}$ м, $T\approx 300$ К, $M=29\cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\langle u\rangle\approx 500$ м/с, получим $\tau<10^{-6}$ с$=1$ мкс. Увы, последний этап жизни капли длится порядка микросекунды. По его истечении от почти неподвижной капли остается последняя молекула, и уже невозможно сказать, кому она принадлежала — капле ли, воздуху ли (разве что включить в ее состав заранее меченный атом азота?). И тут пора опустить

Занавес,

после чего потрясенный трагедией зритель может поразмышлять, все ли ему показали верно и зачем все это нужно.

Эпилог, или О чем умолчали в Трагедии и кому она нужна

Ну конечно, мы обсудили далеко не все. Например, как уже было сказано, можно было бы рассмотреть так называемые процессы молекулярного переноса массы (диффузию), импульса (вязкость) и энергии (теплопроводность). Это потребовало бы знания соответствующих коэффициентов и позволило бы описать участок движения капли от точки D до точки S, за которой начинается свободномолекулярный режим обтекания. Далее, не обсуждено влияние кислорода, присутствующего в воздухе,— «чужого» газа с точки зрения вещества азотной капли; можно ожидать, что этот кислород, как и всякое вещество, будет стремиться диффундировать туда, где его нет, т. е. внутрь капли; во всяком случае, он как-то мешает испаряющимся молекулам азота. Не учтено и то, что форма капли не обязательно шаровая; она колеблется в процессе движения (это видно из рисунка 2, *в*). Далее, мы считаем, что температура капли во все времена ее жизни остается равной температуре насыщенного пара при атмосферном давлении над плоской поверхностью жидкого азота, а это, может быть, не совсем так.

И наконец, кому нужна эта капля с ее трагедией?

Поведение отдельных капель и целых облаков из них нужно знать во многих случаях. Например, если нужно сделать видимой (визуализировать) картину обтекания модели будущего летательного аппарата, добавьте в поток капельки жидкого азота и подсветите в нужном месте — в результате рассеяния света на «тумане», состоящем из этих капелек, а также частиц воды и углекислого газа, сконденсировавшихся в их холодных следах, станут видимыми все завихрения воздуха вокруг модели. А в так называемых криогенных аэродинамических трубах жидкий азот специально впрыскивается в поток для его охлаждения, и важно знать, как быстро испаряются капли азота с разными начальными размерами. И во многих процессах химической технологии, очистки промышленных газов и в других случаях нужно знать прежде всего поведение отдельной капли (любого вещества) с изменяющейся массой.

Для нас полезно уже то, что эта маленькая трагедия азотной капли позволила обсудить некоторые физические процессы и показать, как эксперимент и теоретические рассуждения дополняют друг друга.

Кооператив «Электрон» и предприятие «Восток Лтд»

Предлагают владельцам и пользователям ПЭВМ типов «Вектор-06Ц», «Львов ПК-01», УК-НЦ («Электроника МС0511»), «БК0010-01», «БК0011», «IBM XT/AT», «Поиск», «Специалист», «Синклер ZX Спектрум», «Правец-8Д», ДВК-3,4, «РК-86 32К», «Микроша», «Партнер», «Апогей», «Агат-7», «Корвет», «Атари XE/XL/ /ST», «Коммодор +4,16», «Коммодор 64,128» широкий выбор системных, прикладных, игровых, учебных программ, новейшие разработки из первых рук по умеренным ценам, а также учебные программы для классов УК-НЦ («Электроника МС0202»), КУВТ-86.

Заключат с авторами договоры на тиражирование разработанного ими программного обеспечения с выплатой процентов от реализации.

Купят программы для ПЭВМ «Вектор-06Ц», «Львов ПК-01», УК-НЦ, «Поиск», возможен обмен программами.

Продадут компьютеры «Синклер ZX Спектрум» без дисковода и с дисководом, «Специалист», ДВК всех модификаций, УК-НЦ («Электроника МС0511»), классы УК-НЦ («Электроника МС0202») с программным обеспечением, «Корвет», классы «Эпос» на базе ПЭВМ «Корвет» (32 рабочих места), IBM-совместимые компьютеры, телефаксы, копировально-множительную технику, дискеты.

Доработают ранние модели ПЭВМ типа ДВК-2, ДВК-3 с приближением их возможностей к новым моделям ДВК-3,4, оснастят их дополнительными контроллерами и периферийными устройствами.

Оснастят компьютеры УК-НЦ («Электроника МС0511») жесткими дисками типа «Винчестер», кассетами ППЗУ с Бейсиком.

Окажут всем предприятиям и организациям, заинтересованным в закупках разнообразных импортных товаров народного потребления за советские рубли, посреднические услуги: помощь в заключении Вашим предприятием контрактов с инофирмами и совместными предприятиями. Списки предлагаемых к закупке товаров будут высланы по вашей письменной заявке.

Приглашают ваше предприятие стать полноправным участником вновь создающихся предприятий в свободной экономической зоне г. Зеленограда. Кооператив «Электрон» и предприятие «Восток Лтд» берут на себя регистрацию предприятия, обеспечивают оффисом, телефоном, менеджером, бухгалтером. Прибыльность создаваемых предприятий гарантируется. Все, что требуется от вашего предприятия,— это заключить с предприятием «Восток Лтд» договор, определяющий долю участников в уставном капитале и процент, идущий на оплату наших услуг.

Вышлют наложенным платежом:

— комплект рабочей документации для изготовления малогабаритного недорогого станка для изготовления стенных шлакоблоков;

— книги и брошюры по программному и аппаратному обеспечению ПЭВМ «Синклер ZX Спектрум»;

— комплекты документации по созданию обществ с ограниченной ответственностью, акционерных обществ, малых предприятий;

— справочник адресов и телефонов зарубежных фирм, аккредитованных в г. Москве.

Окажут всем предприятиям услуги по маркетингу наиболее эффективным способом: разошлют рекламу вашей продукции по 40000 адресов предприятий и учреждений.

Приглашают к сотрудничеству дилеров для помощи в реализации продукции и услуг кооператива «Электрон» и предприятия «Восток Лтд» с выплатой процентов от реализации.

Почтовый адрес для справок, запросов каталогов и заявок: 103489, Москва, Зеленоград, корпус 705, кооператив «Электрон».

По желанию заказчиков каталоги, программы, компьютеры, документация высылаются по почте.

Телефон для справок: 536-12-81 (с 12 до 18 часов).

НЕВПИСЫВАЕМЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Е. АНДРЕЕВ

Рассмотрим куб, одна из вершин которого срезана плоскостью (рис. 1). Можно ли полученный многогранник вписать в сферу? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, какой именно плоскостью срезана вершина? С решением этой, а также подобных задач мы и хотим познакомить читателя.

Предположим, что дан выпуклый ограниченный многогранник, т. е. тело в пространстве, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками — гранями — и лежащее по одну сторону от плоскости каждой из своих граней. Требуется выяснить, можно ли данный многогранник вписать в сферу.

Обозначим многогранник буквой M, занумеруем по отдельности его грани, ребра и вершины и будем обозначать i-ю грань через Γ_i, i-е ребро через P_i и i-ю вершину через B_i. Принято говорить, что две грани смежные, если у них имеется общее ребро, а две вершины соседние, если они суть концы одного и того же ребра.

Чтобы решить поставленную задачу, надо прежде всего проверить, являются ли все многоугольники Γ_i вписанными. Затем для каждого ребра P_k рассмотрим пару граней Γ_i и Γ_j, граничащих по этому ребру, и обозначим через r_k расстояние от точки пересечения перпендикуляров, восставленных из центров окружностей, описанных около Γ_i и Γ_j, до одной из вершин многоугольника Γ_i или Γ_j; величина r_k, очевидно, не зависит от выбора вершины (рис. 2).

Задача 1. *Докажите, что многогранник M вписанный тогда и только тогда, когда все многоугольники Γ_i вписанные, и $r_1=r_2=\ldots=r_m$, где m — число ребер многогранника.*

Этот или аналогичный способ проверки вписанности M был известен очень давно, но в начале XX века обнаружилось, что в целом ряде случаев можно доказать, что M вписанным не является, не производя почти никаких вычислений.

Первым это заметил немецкий математик Э. Штейниц. В 1927 году вышла в свет его статья, в которой была доказана следующая теорема.

Теорема Штейница. *Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

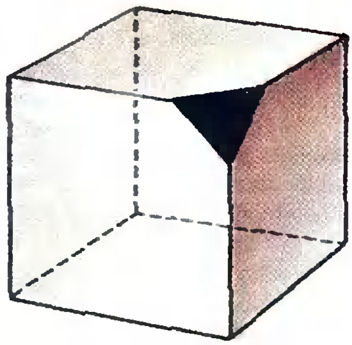


Рис. 1.

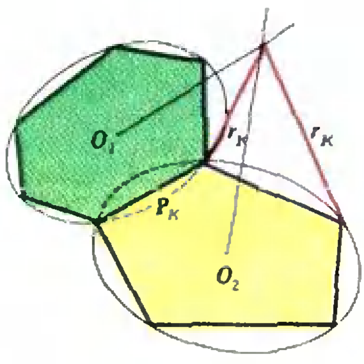


Рис. 2.

I) никакие две черные вершины не были соседними;

II) число черных вершин было больше, чем число белых.

Тогда многогранник M нельзя вписать в сферу.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем некоторые замечания. Пусть у нас есть фиксированная сфера и некоторый двугранный угол, ребро которого эту сферу пересекает. Возьмем точку пересечения ребра со сферой и проведем через нее касательную плоскость (рис. 3). Двугранный угол высекает в этой плоскости линейный угол. Этот угол мы назовем линейным углом двугранного угла относительно данной сферы или просто *относительным углом двугранного угла*. Очевидно, что относительный угол не зависит от выбора одной из двух точек пересечения ребра со сферой. Если же ребро касается сферы, то удобно положить величину относительного угла равной нулю.

Рассмотрим теперь выпуклый многогранный угол, все ребра которого пересекают данную сферу. Относительные углы его двугранных углов назовем *относительными углами данного многогранного угла.* Пусть у многогранного угла n граней, а его вершина лежит на сфере. Тогда сумма его относительных углов равна $\pi(n-2)$. В самом деле, проведем через вершину многогранного угла касательную плоскость, а затем проведем плоскость, ей параллельную, секущую и сферу, и все ребра многогранного угла (это возможно, так как все ребра угла пересекают сферу). Многогранный угол высекает в этой последней плоскости многоугольник, углы которого равны относительным углам, что следует из теоремы об углах с попарно параллельными сторонами (рис. 4).

Перейдем к доказательству самой теоремы. Предположим, что многогранник M вписан в сферу. Обозначим относительный угол двугранного угла с ребром P_i через γ_i. Пусть n_k — число ребер, сходящихся в вершине B_k.

Из доказанного выше следует, что сумма относительных углов при вершине B_k равна $\pi(n_k-2)$. Положим $\beta_i=\pi-\gamma_i$, угол β_i — *внешний относительный угол*, тогда $\gamma_i=\pi-\beta_i$. Если сумма внутренних относительных углов равна $\pi(n_k-2)$, то сумма внешних относительных углов равна 2π. Итак, если в вершине B_k сходятся ребра P_i, P_j, ... P_l, то

$$\beta_i+\beta_j+\ldots+\beta_l=2\pi.$$

Выпишем аналогичные равенства для каждой вершины многогранника, потом умножим равенства, соответствующие черным вершинам, на -1 и сложим их все. Черных вершин больше, следовательно, в правой части будет стоять отрицательное число. Рассмотрим сумму, стоящую в левой части. Если i-е ребро идет из черной вершины в белую, то число β_i входит в левую часть один раз со знаком «+» и один раз со знаком «—», в сумме 0; если — из белой вершины в белую, то β_i оба раза входит с «+». Ребер

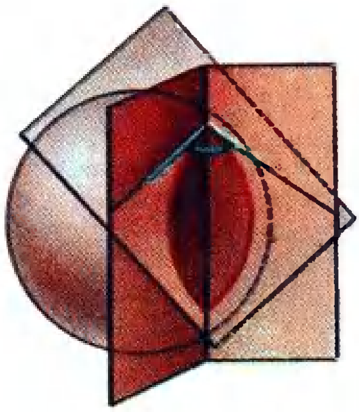


Рис. 3.

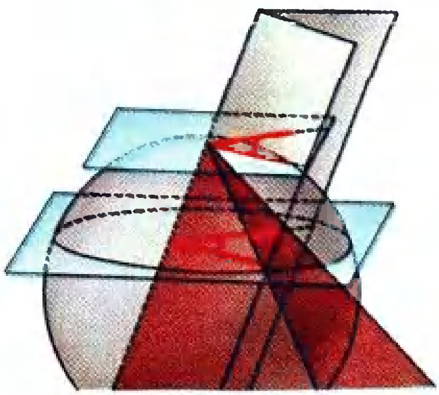


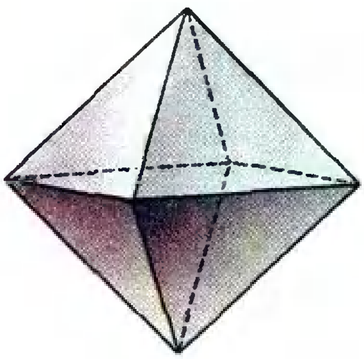
Рис. 4.

с двумя черными концами не бывает. Итак, сумма чисел в правой части не меньше нуля, и мы пришли к противоречию, предположив, что многогранник M — вписанный.

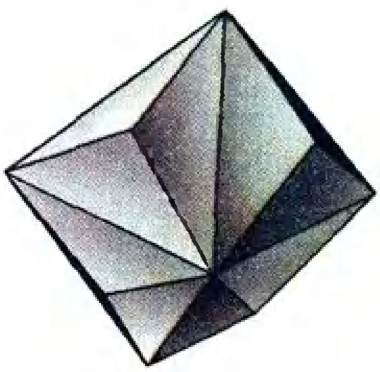
Прежде чем переходить к анализу полученного результата, т. е. прежде чем выяснять, чем замечательна и что означает теорема Штейница, надо показать, что теорема содержательна, т. е. что существуют многогранники, удовлетворяющие ее условиям. Возьмем октаэдр (рис. 5, *а*) и на каждой его грани как на основании построим правильную треугольную пирамиду, причем высоту пирамиды возьмем такой маленькой, чтобы двугранные углы при основании были меньше 25°. Рассмотрим многогранник M, склеенный из исходного октаэдра и восьми вновь построенных пирамид (рис. 5, *б*).

Задача 2. *Докажите, что многогранник M — выпуклый.*

Объявим белыми те его вершины, которые были вершинами исходного октаэдра, а черными — все остальные. Ясно, что условия теоремы Штейница выполняются. Итак, мы построили пример многогранника, который нельзя вписать в сферу, в чем можно убедиться, не зная ни размеров, ни углов многогранника, но зная только его *строение.*



а)



б)

Рис. 5.

Уточним, что значит строение. Начнем с плоскости. Чтобы описать строение выпуклого многоугольника, надо сказать, сколько у него вершин, тогда у него столько же и сторон; каждая сторона смежна с двумя другими, и в каждой вершине сходятся две стороны.

Иное дело в пространстве: у додекаэдра (рис. 6, *а*) и у десятиугольной призмы (рис. 6, *б*) одинаковое число граней — 12, одинаковое число ребер — 30, одинаковое число вершин — 20, а строение совсем разное. Чтобы описать строение многогранника, надо сказать не только сколько у него ребер, граней и вершин, но и как грани склеены между собой, т. е. какие грани являются смежными, какие вершины являются соседними и какие грани сходятся в каждой из вершин. Два многогранника имеют одинаковое строение, если у них одинаковое число вершин, ребер и граней и они одинаково из этих элементов составлены.

Назовем выпуклый многогранник M такой, что ни сам он, ни любой другой многогранник, имеющий то же строение, вписанным не является, *абсолютно невписываемым.* Из теоремы Штейница следует, что любой многогранник, удовлетворяющий ее условиям I и II, является не только невписываемым, но и абсолютно невписываемым. Построенный выше многогранник (рис. 5, *б*) представляет собой пример абсолютно невписываемого многогранника. Ничего подобного на плоскости не бывает: для всякого $n \geqslant 3$ найдется вписанный n-угольник. Поэтому до Штейница считали, что не существует абсолютно невписываемых многогранников. Существовали даже очень правдоподобные, но чуть-чуть не законченные доказательства этого утверждения. Теперь появилась новая проблема: найти все абсолютно невписываемые многогранники, точнее, найти необходимые и достаточные условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым.

У нас есть условие Штейница — достаточное условие абсолютной невписываемости. Может быть оно является необходимым? Нет. Это вытекает из следующих задач.

Задача 3. *Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

1) число белых было не больше числа черных;

2) никакие две черные вершины не были бы соседними и, напротив, нашлись бы две соседние белые вершины.

Доказать, что многогранник M нельзя вписать в сферу.

Задача 4. *Построить пример многогранника, удовлетворяющего условию задачи 3 и не удовлетворяющего условиям теоремы Штейница.*

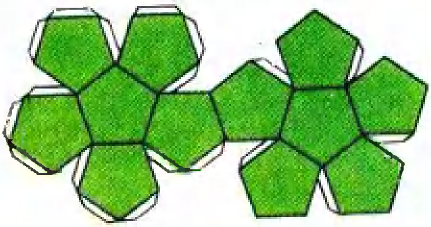
Важно отметить и другое: если в каждой вершине многогранника M сходится одно и то же число, скажем, k граней, то M не удовлетворяет ни условию теоремы Штейница, ни условию задачи 3. Предположим противное, и пусть m — число всех ребер многогранника, p — число его черных вершин, g — белых, $p \geqslant g$ (в теореме Штейница это неравенство — строгое). Тогда $2m = k(p+g)$: у каждого ребра два конца, в каждой вершине сходятся k ребер. Кроме того, на каждом ребре лежит белая вершина, т. е. $m \leqslant kg$, и в случае задачи 3 это неравенство строгое. С другой стороны, $p+g \geqslant 2g$, и в условиях теоремы Штейница это неравенство строгое. Итак, получаем неравенства

$$kg \leqslant m \leqslant kg.$$

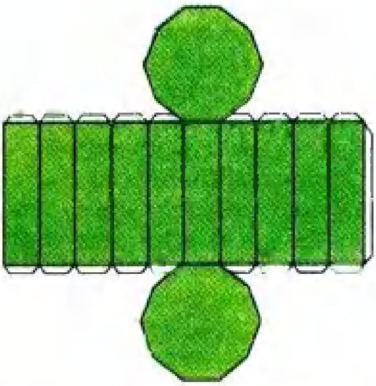
Если M удовлетворяет условию теоремы Штейница или условию задачи 3, то одно из этих неравенств будет строгим, что невозможно.

Остановимся теперь на многогранниках, в каждой вершине которых сходятся три грани: эти многогранники в некотором смысле самые типичные, но мы о них ничего не знаем с точки зрения их вписываемости.

Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости. Они либо образуют трехгранный угол, либо линии их пересечения параллельны и тогда скажем, что они образуют бесконечный трехгранный угол. Фиксируем некоторую сферу. Пусть все ребра трехгранного угла ее пересекают, а вершина этой сфере не принадлежит, а может быть, вершины и вовсе нет. Оказывается, что если вершина угла лежит внутри шара, но не на сфере, то сумма относительных углов больше π, а если она лежит вне шара или угол бесконечный,— то меньше π. Действительно, рассмотрим окружности, высекаемые гранями трехгранного угла на сфере,— углы между этими окружностями и есть относительные углы трехгранного угла. Возьмем точку на сфере, не принадлежащую ни одной из этих окружностей, и стереографически спроектируем окружности из этой точки на плоскость. Возможны три случая (рис. 7, *а, б, в*): в первом — вершина лежит вне сферы, во втором — на сфере, в третьем — внутри

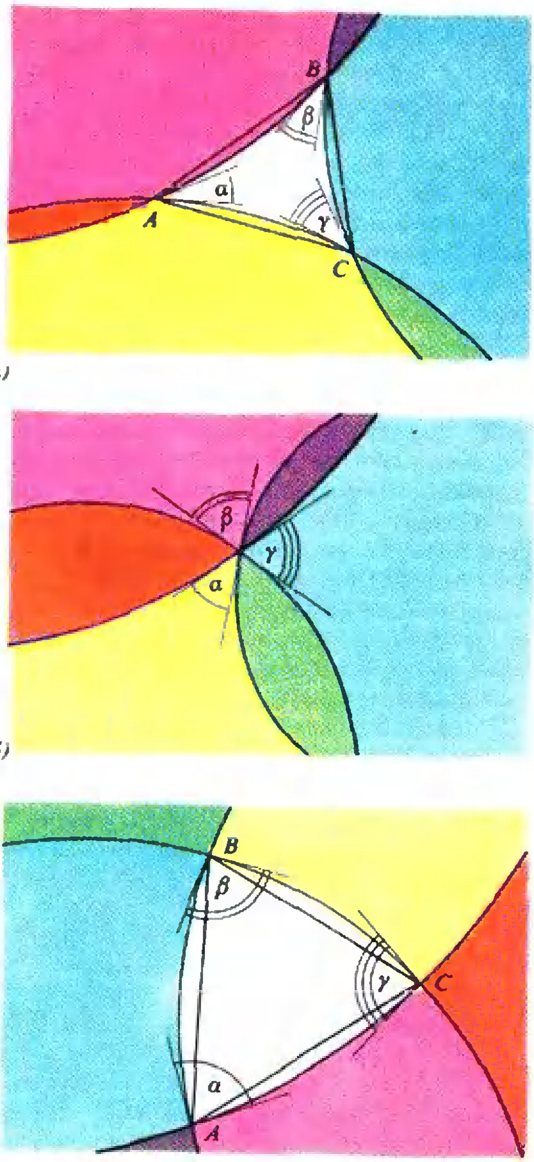


а)



б)

Рис. 6.



а) б) в)

Рис. 7.

сферы. Величины углов сохраняются при стереографической проекции, значит, углы α, β, γ равны исходным относительным углам. В первом случае $\alpha+\beta+\gamma$ меньше суммы углов $\triangle ABC$, а в третьем — больше. Утверждение доказано.

Пусть все вершины многогранника M можно разделить на черные и белые так, чтобы две вершины одного цвета не были соседними.

З а д а ч а 5. *Пусть во всех вершинах многогранника M сходится одинаковое число граней и все вершины разбиты на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета соседними не оказались. Доказать, что число черных вершин равно числу белых.*

З а д а ч а 6. *Докажите, что вершины многогранника можно разбить на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соседними тогда и только тогда, когда у каждой грани многогранника четное число сторон.*

У к а з а н и е. Для доказательства достаточно взять любую вершину и объявить ее белой, соседние с ней — черными и т. д. Нужно доказать, что при этом не возникает противоречий, т. е. что во всякой замкнутой ломаной, составленной из ребер многогранника, четное число звеньев.

Вернемся к многограннику M с раскрашенными вершинами. Так как у M в каждой вершине сходятся три грани, то число белых вершин равно числу черных вершин. Выделим у него некоторые из черных вершин (одну, две или все) и отрежем их с помощью плоскостей. Каждую вершину отрежем одной плоскостью, пересекающей лишь те ребра, которые из этой вершины исходят, и не содержащей никаких вершин M. Получившийся многогранник обозначим M'. Он отличается от M тем, что у него вместо некоторых черных вершин — треугольные грани. Докажем, что многогранник M' — абсолютно невписываемый.

Предположим, что многогранник M' или другой многогранник, имеющий то же строение, вписан в сферу. Выделим три грани, которые соответствуют трем граням многогранника M, сходящимся в одной обрезанной вершине. Эти три грани попарно смежные, вершина обрезанного трехгранного угла лежит заведомо вне сферы, так как многогранник вписанный, поэтому сумма относительных углов при них меньше π. Припишем каждому ребру многогранника M относительный угол при соответствующем ребре многогранника M'. Тогда сумма этих приписанных углов при всех белых и при всех не выделенных черных вершинах равна π, а при выделенных черных вершинах строго меньше π. Как и при доказательстве теоремы Штейница, выпишем эти равенства и неравенства, суммы, соответствующие белым вершинам, умножим на −1 и сложим их. В результате должно получиться строгое неравенство. Однако в левой части мы получим нуль, ибо каждый из приписанных углов один раз входит в сумму при белой вершине, а один раз — при черной. В правой же части мы тоже получим нуль, так как число белых вершин равно числу черных. Полученное противоречие ($0<0$) и доказывает наше утверждение.

Точно такое же рассуждение можно провести, если отмеченные вершины срезать не одной, а несколькими плоскостями, лишь бы сходящиеся в них грани оставались попарно смежными и не сходились в одной вершине.

Этим способом можно получать и другие достаточные условия. Сейчас стали известны и некоторые необходимые условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым, но в целом проблема до сих пор не решена.

Метод относительных углов позволяет решать и другие интересные задачи.

З а д а ч а 7. *Пусть в каждой вершине многогранника M сходятся три грани, а у каждой его грани четное число сторон. Докажите, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M — вписанный.*

У к а з а н и е. Воспользуйтесь задачей 6. Не пропустите такой неприятной возможности: ребра, исходящие из вершины, не лежащей на сфере, касаются сферы.

Аналогичная, но более сложная

З а д а ч а 8. *Пусть все вершины многогранника M разбиты на черные и белые, как это описано в задаче 5, и число черных вершин равно числу белых. Докажите, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M — вписанный.*

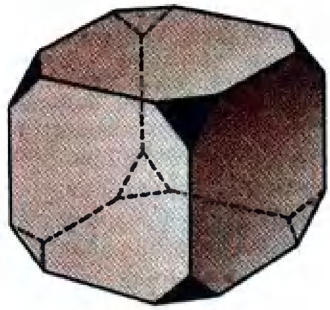


Рис. 8.

Таким образом, если вершины можно разбить на черные и белые, как это описано в задаче 5, то многогранник либо абсолютно невписываемый, либо удовлетворяет задаче 8, т. е. из того, что на сфере лежат все его вершины, кроме одной, следует, что он вписанный.

Простейшим примером абсолютно невписываемого многогранника является куб с одной срезанной вершиной (см. рис. 1).

В заключение остается сознаться, что Штейниц доказал отнюдь не ту теорему, которая называется его именем, но двойственное к ней утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

З а д а ч а 9. *Пусть все грани многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

1) число черных граней было больше, чем число белых;

2) никакие две черные грани смежными не являются.

Докажите, что многогранник M нельзя описать вокруг сферы.

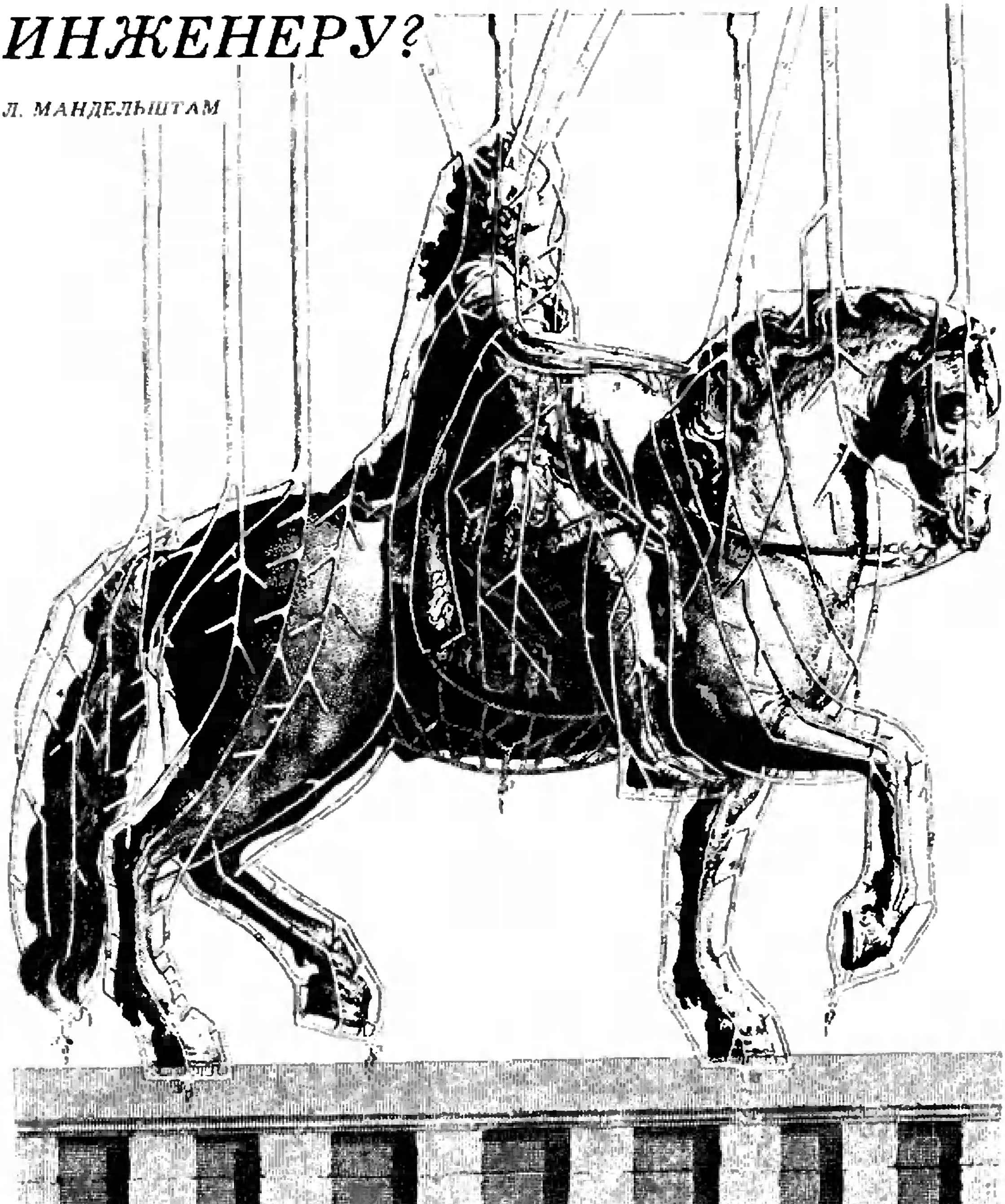
На рисунке 8 изображен один из самых простых примеров *абсолютно неописываемого* многогранника — куб, у которого срезаны все вершины.

Год назад мы начали новый цикл публикаций с условным названием «Письма о физике». Сегодня вниманию читателей мы предлагаем еще один материал из этого цикла. Это вводная в курс физики лекция, прочитанная в 1918 году известным советским физиком, создателем одной из крупнейших физических научных школ академиком Л. И. Мандельштамом студентам Одесского политехнического института. Тема лекции, как нам представляется, остается актуальной и сейчас.

Впервые этот материал был опубликован в нашем журнале в июле 1979 года.

ПОЧЕМУ ФИЗИКА НУЖНА ИНЖЕНЕРУ?

Л. МАНДЕЛЬШТАМ



Приступая к чтению лекций по физике, я хотел бы, прежде чем перейти к систематическому изложению предмета, остановиться сегодня на одном общем вопросе и поделиться с вами некоторыми соображениями насчет того положения, которое физика занимает и, по моему убеждению, должна занимать в ряде наук, изучению которых вы собираетесь посвятить ближайшие годы.

Мне хотелось бы дать вам материал, на основании которого вы могли бы сами убедиться, что физика нужна инженеру всегда, во все время его деятельности, и что на нее нельзя смотреть, как на предмет, который нужно — да и нужно ли? — раз пройти, а потом можно и забыть, так как ведь все равно то, что необходимо знать инженеру из физики, еще раз повторяется при прохождении специальных предметов.

Говоря, что инженеру нужна физика, я имею в виду не только то, что он должен быть знаком с теми отдельными явлениями и законами, с которыми он непосредственно встречается в своей практической деятельности. Такое утверждение было бы само собой очевидным. Что инженер-строитель, рассчитывая прочность сооружения, должен быть знаком с основными законами упругости, что инженер-электротехник в проектировании, скажем, осветительной сети должен знать закон Ома, связывающий силу тока, сопротивление и электродвижущую силу батареи, и т. д.— это, конечно, не нуждается в доказательстве. Нет, когда я говорю, что инженеру нужна физика, я этим хочу сказать, что ему нужно широкое владение этим предметом в его совокупности; я утверждаю, что ему нужно знание физики самой по себе как цельной дисциплины с ее специфической методикой, а не только в зависимости от текущих применений. Я утверждаю, наконец, что для этого инженеру недостаточно знать только опытную часть ее, а что он должен быть основательно знаком с теорией.

Но для того чтобы показать, что это действительно так, мы прежде всего должны постараться выяснить структуру физики как науки и посмотреть, в каком соотношении находятся теория и тот опытный материал, которым физика оперирует.

Конечно, мы не можем решать здесь вопроса о сущности физической науки во всей его полноте. Этот вопрос, относящийся к теории познания и крайне интересный как для физика, так и для философа, значительно более сложен, чем это может показаться на первый взгляд. В истории философской мысли он всегда занимал важное место. Но нам для нашей цели и нет надобности особенно сильно в него углубляться. Нам достаточно будет заняться только одной его стороной, хотя, правда, и здесь нам придется начать несколько издалека.

Не подлежит сомнению, что единственным средством, с помощью которого мы черпаем наши сведения об окружающем нас мире, являются наши органы чувств. Но единичные чувственные восприятия слишком мимолетны и неустойчивы, чтобы служить материалом для дальнейшей переработки. И вот человек выделяет и фиксирует в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Этот процесс, совершающийся совершенно непроизвольно, ведет к образованию того, что в логике называется понятиями.

В образовании понятий состоит первый шаг по пути познания природы. Они являются той базой, на которой строится дальнейшее. Но образованные таким образом первоначальные понятия обладают, как мне кажется, следующим свойством. Они не поддаются строгому определению. Мы все владеем понятием «свет». Но объяснить словами, определить один другому сущность этого понятия мы не можем. Чтобы научиться ему, нужно иметь глаза, нужно видеть, как освещается все нас окружающее при восходе солнца и как погружается опять во мрак при его заходе. Если быть прозаичнее, тому же можно научиться, включая и выключая электрическую лампочку. Но одно несомненно — слова, определения здесь бессильны. Попробуйте объяснить слепому от рождения, что такое свет.

Итак, одними словами первоначальным физическим понятиям научить нельзя. Вот почему, позвольте мне это здесь подчеркнуть, ни учебник, ни учитель недостаточны, чтобы научить физике. Учащийся должен хоть немного работать опытно сам. Он должен хоть поверхностно, но сам слышать, сам осязать те явления, о которых ему говорят.

Мы несколько отвлеклись в сторону. Вернемся к первым шагам по пути познания природы, к понятиям, непосредственно навязанным нам природой. По мере того, как человечество увеличивало свой запас навязанных опытом понятий (опытных знаний), все настоятельнее являлась потребность в их систематизации, без которой нет возможности разобраться в бесконечном обилии окружающих нас явлений. В этой систематизации громадную службу оказывает нам наша способность образовывать другого рода понятия, понятия более определенные, чем те, о которых шла речь выше, и менее зависящие от наших чувств. В первую очередь сюда относятся понятие о числе и те понятия, которыми оперирует математика. В области этих понятий, другими словами, в области математического мышления мы себя чувствуем несравненно более уверенно, чем при оперировании с материалом, непосредственно поставляемым нам нашими чувствами. При помощи математических понятий можно определенно формулировать посылки и так же определенно и легко делать из них выводы и заключения. И вот, зная за собой эту силу, человек старается — вначале инстинктивно, а затем, с развитием науки, и сознательно — приспособить математические понятия и специально понятие о числе к сырому опытному материалу, к понятиям физическим.

В этом процессе перехода от качественных соотношений к количественным заключается важнейший этап научной мысли. На нем основано как понятие об измерении, так и сам процесс измерения физических величин. Можно смело утверждать, что какая-нибудь область физических явлений вообще становится наукой только с того момента, когда мы научаемся вводить в нее измерения. Так, например, пока не было точного понятия температуры и не умели ее измерять, науки о теплоте почти или даже совсем не существовало.

Пользуясь в описанном смысле математикой, мы стараемся теперь найти систему в окружающих нас явлениях и облегчить себе их понимание тем, что ищем такие математические формулы в общем смысле слова, не непременно узко алгебраическом, которые охватывали бы возможно большее число единичных фактов или общую сторону различных явлений. Если такая формула найдена, то мы говорим, что нашли физический закон. Возьмем пример. Закон преломления света при переходе из одной прозрачной среды в другую гласит: падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости, и отношение между синусом угла падения и синусом угла преломления есть величина постоянная. Например, для воды и воздуха это отношение равно 1,33. Что представляет собой этот закон? Это — формула, охватывающая бесчисленное множество единичных случаев преломления. Она избавляет нас от необходимости делать в каждом отдельном случае опыт, запоминать или заносить в таблицы для каждого отдельного случая угол падения и соответственный угол преломления луча. Зная закон преломления, вы уверены, что в любой момент, когда это вам понадобится, при помощи простейших вычислений вы сможете решить всякий представившийся в этом направлении вопрос.

По мере того как физические знания росли, по мере того как число найденных законов увеличивалось, все труднее и труднее становилось разобраться в их разнообразном обилии. Движимые опять необходимостью возможно лучше ориентироваться в этом громадном материале, люди старались найти такие картины, такие точки зрения, которые позволили бы объединить в одно целое отдельные законы. Так создавалась физическая теория или, вернее, теории.

Теория, таким образом, находится в таком же отношении к отдельным законам, в каком законы находятся к отдельным явлениям. Систематизирующая роль теории, конечно, не исчерпывает всей ее сущности, но все же, как вы видите, в систематизации наших знаний она имеет громадное значение. И тут математика является огромным подспорьем. Только что рассмотренные соотношения между различными сторонами физики и постепенное развитие их могут быть прослежены на любой физической теории. Очень просто это сделать, например, на оптике.

Оптика, между прочим,— одна из самых древних научно разработанных отраслей физики. Изучение оптических явлений уже в древности привело к установлению некоторых законов. Закон прямолинейного распространения света и закон отражения от зеркал были известны давно. Позже, в XVII веке, был найден закон преломления. Смотря по тому, какая группа явлений подвергалась исследованию и с каких точек зрения к ним подходили, были устанавливаемы различные отрывочные законы. Были открыты явления дифракции света, интерференции и т. д. Но пока не было общей, объединяющей точки зрения, было чрезвычайно трудно разбираться во всей совокупности оптических явлений. Более того, отдельные законы, казалось, находились в противоречии друг с другом. Загибание света не вязалось, например, с прямолинейным распространением луча.

Так было до тех пор, пока усилиями ряда гениальных физиков, из которых в первую очередь должны быть названы Гюйгенс и Френель, не удалось найти ту картину, которую мы теперь называем волновой теорией света и которая позволила объединить всю оптику в одно стройное целое. И все, что казалось сложно и противоречиво, сделалось простым и ясным.

А возьмите теорию всемирного тяготения Ньютона. Объединяя с гениальной смелостью столь разнородные на взгляд наших чувств явления, как падение камня и движение небесных светил, она грандиозна именно своей простотой. В одной простой формуле она содержит всю динамику всего мироздания.

Я ограничусь этими примерами. Может быть, в них осталось кое-что вам неясным. Это ничего. Понимание фактической стороны придет по мере того, как вы будете изучать физику, но я думаю, что для вас, по крайней мере в общих чертах, теперь выяснилось соотношение между ее опытной и теоретической сторонами.

Эти две стороны, как вы видели, тесно связаны между собой, они вместе представляют одно целое. В достижении нашей конечной цели — познания природы — могучим подспорьем, систематизирующим наш опыт и дающим возможность пользоваться материалом, является теория. Теория, а значит и орудие, которым, как мы видели, она пользуется,— математика, не являются балластом и чем-то искусственно пристегнутым к науке о природе. Нет, она есть то орудие, без которого мы не были бы в состоянии осилить окружающий нас мир как в практическом смысле, так и в смысле удовлетворения умственных потребностей.

Поэтому я нахожу — не считайте это парадоксом,— что нельзя требовать знания только опытной физики, но вовсе не потому, что это слишком мало, а потому, что это слишком трудно. Более или менее полное знание опытной физики без помощи теории человеку не под силу.

Изложенный взгляд на систематизирующую роль теории очень хорошо иллюстрируется одним красивым сравнением, сделанным Пуанкаре.

Пуанкаре сравнивает всю физику с огромной библиотекой. Отдельные опытные данные, отдельные явления — это те тома, из которых библиотека состоит. Теория — это каталог нашей библиотеки. Как без каталога библиотека, особенно большая, представляет собой лишь сборище книг, очень ценных книг, которыми в сущности продуктивно пользоваться нельзя, точно так же физика без теории не есть наука, а лишь довольно малоценный конгломерат отдельных фактов, разобраться в которых нет возможности.

А теперь нам будет уже нетрудно ответить на тот вопрос, который мы поставили себе вначале. Нужна ли инженеру физика в ее целом? Не достаточно ли ему знания отдельных, непосредственно для его практической работы нужных фактов? Ответ, мне кажется, ясен.

Чтобы продуктивно работать — позвольте мне говорить на языке сравнения Пуанкаре,— инженеру не достаточно прочесть и знать несколько книг из громадной библиотеки знания. Он должен быть знаком или, по крайней мере, уметь разбираться в каталоге всей библиотеки.

История техники знает немало примеров загадочных неуспехов, неуспехов повторных и имевших иногда весьма неприятные последствия. И очень часто оказывалось, что загадочность обусловливалась не присутствием действительно новых, до сих пор вообще неизвестных факторов, а отсутствием у тех, кто данными вопросами занимался, широкого физического горизонта. И когда за решение брались люди, обладавшие действительно широкими физическими знаниями, то загадка не только разъяснялась и находился способ предотвратить неуспех, но часто открывались и новые пути для дальнейшего прогресса.

Позвольте мне в заключение остановиться на одном примере, как мне кажется, иллюстрирующем значение широкого физического горизонта при разрешении технических вопросов.

Я имею в виду вопрос об оптических инструментах и, в частности, вопрос о микроскопе... Микроскопом особенно заинтересовались уже в середине прошлого столетия, после того как применение его в биологии открыло совершенно новые пути в изучении явлений жизни. Но после первых успехов обнаружилось, что существовавшие тогда микроскопы не были хороши и не были сильны. Исследователи ясно чувствовали, что если бы удалось построить микроскоп с бо́льшим увеличением, то вместе с тем явилась бы возможность проникнуть еще дальше в сущность жизни. А такая перспектива всегда с особенной силой манила людей. И фантазия не останавливалась перед постройкой микроскопов, увеличивающих в десятки, сотни тысяч и миллионов раз, и ждали от их применения чудес. Исследователи ждали, что с их помощью можно будет проникнуть в самые сокровенные детали строения живой материи.

Понятно, что при такой конъюнктуре и специалисты-конструкторы оптических приборов взялись с усиленной энергией за усовершенствование микроскопа. И они считали принципиально возможным достигнуть любых увеличений. Весь вопрос, казалось, сводился к преодолению технических трудностей.

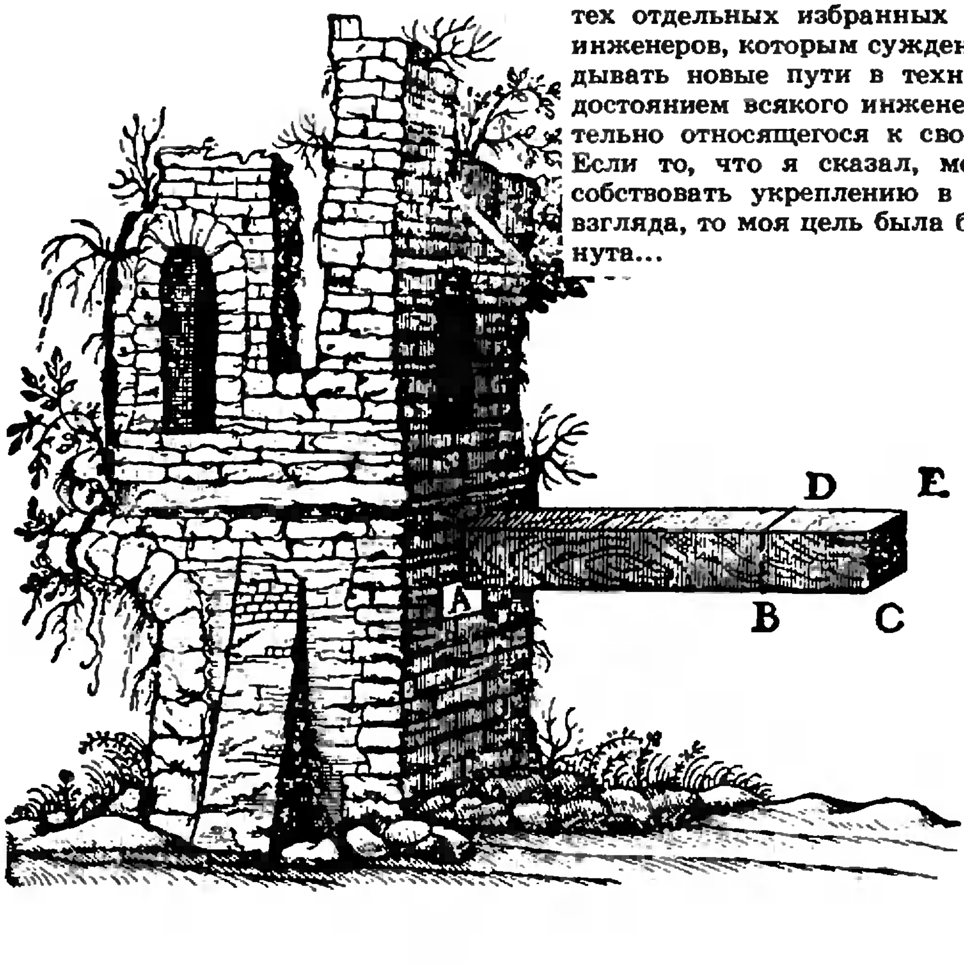
Дело в том, что в то время все расчеты, касавшиеся оптических приборов, велись исключительно при помощи так называемой геометрической оптики. В основании расчетов лежала та теория микроскопа, которая оперирует со световыми лучами как с прямыми линиями... А с точки зрения геометрической оптики действительно не существует принципиальной границы для возможного увеличения микроскопа.

Однако же весьма скоро обнаружилось, что работа, направленная к усовершенствованию микроскопа, не дает тех результатов, которых, казалось, можно было ожидать. Между тем, что казалось достижимым, и тем, что достигалось, было противоречие, которому объяснения не находилось.

Так обстояло дело, когда йенский механик Цейс, имевший небольшую механическую и оптическую мастерскую и изготовлявший сам недурные по тому времени микроскопы, пригласил в качестве консультанта тогда еще молодого физика Аббе. Аббе обладал хорошей теоретической подготовкой, хорошо владел теоретической оптикой. Он знал, что геометрическая оптика есть лишь удобная схема для обработки классического явления преломления. Он знал ей цену, потому что сам очень много внес нового в эту область. Но он знал также, что с точки зрения волновой теории света, служащей базой для геометрической оптики, последняя есть не более как приближение. И он сразу подошел к вопросу о микроскопе с широким, не связанным узкими рамками геометрической теории взглядом.

Результаты такого подхода к делу не заставили себя долго ждать. Одним из главных результатов, к которым пришел Аббе, был следующий. Он показал, что волнообразная природа света ставит принципиальный предел тому полезному увеличению, которое может быть достигнуто при помощи микроскопа или, вообще, любого оптического инструмента. Если детали объекта мельче определенной величины, то эти детали не могут быть видимы, выявить их ни один микроскоп не может. Все мечты об увеличении в 100 000 и больше раз и все связанные с ними надежды должны быть принципиально оставлены, и работа тех, кто хотел такие микроскопы построить, совершенно бесцельна. Блестящими опытами Аббе подтвердил правильность своих теоретических выводов.

Позвольте мне на этом остановиться. Я надеюсь, что вы теперь согласитесь со мной, что знание, широкое, полное знание физики для инженера — не роскошь, а необходимость, что широкий физический горизонт должен быть достоянием не только тех отдельных избранных людей — инженеров, которым суждено прокладывать новые пути в технике, но и достоянием всякого инженера, сознательно относящегося к своему делу. Если то, что я сказал, может способствовать укреплению в вас этого взгляда, то моя цель была бы достигнута...




IM PER CAESAR
PER CAESAR

СТРАННЫЙ ИМПЕРАТОР И СТРАННЫЙ ПОЛКОВОДЕЦ

(математико - психологическое исследование с двумя скачками в прошлое)

И. АКУЛИЧ

Полководец Теренций, собираясь на заслуженный отдых, пришел к императору и попросил уплатить ему 5 миллионов брассов (брасс — медная монета массой 5 г). Император, однако, был скуп и решил обмануть полководца. Он сказал ему: «Не хочу, чтобы ты довольствовался такой жалкой наградой. Ты пойдешь в казначейство и в первый день вынесешь оттуда монету в 1 брасс, на другой день — монету в 2 брасса, затем в 4, 8, 16 и так далее, каждый раз удваивая сумму денег. Я прикажу ежедневно изготавливать для тебя соответствующие монеты. И пока у тебя хватит сил доставлять их оттуда без чужой помощи — они твои. Но как только очередная монета окажется тебе не по силам — остановись, и на этом наш уговор закончен». Теренций был очень обрадован. Ему чудилось огромное множество монет, одна больше другой, которые он вынесет из казначейства.

Каков же оказался результат? Обогащение Теренция длилось лишь 18 дней, потому что последняя монета весила около 655 кг (ее он еще сумел прикатить с огромнейшим трудом, пользуясь копьем как рычагом), а очередная оказалась бы совершенно неподъемной. Общая же сумма, заработанная Теренцием, составила всего 262 143 брасса, т. е. почти в 20 раз меньше желаемой. Император торжествовал, а Теренций безмерно страдал.

Подробно эту историю можно прочесть у Я. И. Перельмана в его «Живой математике», а также в 8-м номере журнала «Квант» за 1989 год.

Скачок в далекое прошлое

Более века назад лорд Кельвин говорил на лекции в Балтиморе: «Изо всех двухсот миллиардов мужчин, женщин и детей, которые когда-либо прошли по влажному песку с сотворения мира до собрания Британской ассоциации в Абердине в 1885 году, сколько найдется таких, которые на вопрос: «Сжался ли песок под вашей ногой?» ответили бы иначе, чем «Да»?» Действительно, как показал на упомянутом собрании Британской ассоциации О. Рейнольдс, песок под ногой не сжимается, а расширяется, вопреки здравому смыслу.

Но не будем чересчур отклоняться от нашей темы. Лучше зададим подобный вопрос по поводу императорской награды:

«Среди миллионов читателей книги Я. И. Перельмана и десятков тысяч подписчиков «Кванта» сколько найдется таких, которые заметили, что и император, и полководец в этой истории вели себя по меньшей мере *странно* и совершенно *нелогично?*»

В чем же эта странность и нелогичность? Сейчас увидим.

Сперва попробуем оценить некоторые значения, которые нам потребуются. Из рассказа видно, что монета весом 655 кг была почти пределом физических возможностей Теренция: еще чуть-чуть — и он не смог бы ее даже сдвинуть. Оценим это «чуть-чуть» в 45 кг, т. е. будем считать, что самая большая монета, поддающаяся усилиям Теренция, имеет массу 700 кг (что соответствует достоинству в 140 000 брассов). Кроме того, будем считать, что Теренций по состоянию здоровья способен еще в течение 10 000 дней (около 25 лет) ежедневно являться в казну и выносить оттуда монеты.

Итак, император решил поймать своего боевого полководца в ловушку, зачастую именуемую *лавиной* (действительно, лучшего названия не придумаешь: здесь вес монет нарастает лавинообразно, и именно на это сделал ставку скупой и хитрый император). В данном случае коэффициент размножения $k=2$, т. е. каждая монета вдвое тяжелее предыдущей.

Так вот, выбор императором именно такого коэффициента размножения дает нам все основания считать его *странным* человеком, потому что из всех натуральных k он выбрал именно такое, которое приносит Теренцию *наибольшую* прибыль!

Рассмотрим, например, случай, когда каждая новая монета тяжелее предыдущей не в 2, а в 3 раза. Сколько всего монет поднял бы Теренций? Достоинство монеты с номером $n+1$ равно 3^n брассов. Полководец может поднять монету не более чем в 140 000 брассов. Выясним, при каком n число $3^n \leqslant 140\,000$, а $3^{n+1} > 140\,000$, или

$$n \leqslant \log_3 140\,000,$$
$$n+1 > \log_3 140\,000.$$

Другими словами, n — наибольшее целое число, не превосходящее $\log_3 140\,000$, т. е. $n=[\log_3 140\,000]$. Так как $\log_3 140\,000 = 10{,}7\ldots$, то $n=10$. Итак, Теренций поднимет лишь 11-ю монету: в первый день монету в 1 брасс, во второй — в 3, в третий — в 3^2 и т. д. Его награда окажется равной $1+3+3^2+\ldots+3^{10} = 88\,573$ брасса. При $k=2$, как мы помним, Теренций получил 262 143 брасса — почти втрое больше!

Аналогичная ситуация будет и при бо́льших значениях k. Вообще, сумма, которую мог бы получить Теренций (обозначим ее S), при заданном k равна

$$S = 1+k+k^2+\ldots+k^n,$$

где $n=[\log_k 140\,000]$.

По формуле для суммы геометрической прогрессии $S=\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$. Если бы n было достаточно велико, можно было бы принять $[\log_k 140\,000] \approx \log_k 140\,000$, и тогда

$$S \approx \frac{140\,000\,k-1}{k-1} = 140\,000 + \frac{139\,999}{k-1},$$

т. е. и в самом деле S убывает при возрастании k. В нашем случае такого нет — логарифм невелик, поэтому реальная зависимость $S(k)$ будет *неправильно убывающей*. Вот значения S для некоторых k: $S(4)=87\,381$; $S(5)=97\,658$; $S(6)=55\,987$; $S(7)=137\,257$; $S(8)=37\,499$; $S(10)=111\,111$; $S(20)=8421$; $S(50)=127\,551$; $S(100)=10\,101$ (в последнем случае Теренций придет за наградой лишь трижды!).

А если взять $k=1$? Может быть, хотя бы здесь значение S окажется бо́льшим, чем для $k=2$? Увы, нет. В данном случае вступит в действие другой, весьма мрачный фактор — бренность земного бытия. Мы уже оценили предельную продолжительность хождения Теренция за деньгами в 10 000 дней. Следовательно, при $k=1$ ему достанется как раз 10 000 брассов.

Разумеется, если принять другие ограничения (вместо 700 кг и 10 000 дней), то выводы могут оказаться несколько иными (например, при предельной массе в 1000 кг $S(2)<S(3)$), но сути дела это не меняет.

Итак, хитрый (якобы) император, решив обмануть полководца с помощью лавины, выбрал наихудший коэффициент ее размножения (или, во всяком случае, один из худших). Это и дает нам все основания считать его, мягко говоря, *странным* человеком.

Что ж, с императором разобрались. А Теренций? С ним дело несколько сложнее. И предварительно нам придется сделать

Скачок в недалекое прошлое

Еще в школьные годы автор этих строк (кстати, тоже после прочтения книги Перельмана) предлагал своим несведущим в математике знакомым оценить, сколько потребуется пшеничных зерен, чтобы на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую — 2, на третью — 4 и т. д., каждый раз увеличивая количество зерен вдвое. Получив наивный ответ: «Полмешка», автор радовался и принимался убеждать знакомого, что тот не просто ошибается, а очень ошибается, что на самом деле число зерен поражает воображение, возрастая от клетки к клетке лавинообразно; приводил числовой результат с использованием геометрической прогрессии и... получал в ответ скептическую ухмылку: «Да что ты мелешь, какие там триллионы тонн? Сказано полмешка, значит полмешка!» Полное фиаско! И неудивительно, поскольку человеческий разум отказывается воспринимать слишком гигантские, «нежитейские» числа.

Из этого скачка в прошлое сделаем такой вывод. Людей можно условно разделить на две группы: одни, каким бы невероятным ни оказался результат, доверяют вычислениям и строгой логике, другие опираются на здравый смысл и не верят ничему, что ему противоречит. И то, и другое вполне нормально и естественно.

К какой же из двух групп следует отнести Теренция? С одной стороны, он весьма обрадовался, так как сразу понял, до каких больших значений возрастут достоинства монет, даже если начинать приходится лишь с одного брасса (у Я. И. Перельмана так и сказано: «Представил себе множество монет, одна больше другой»). Поэтому мы уверенно относим храброго полководца к первой группе. Но как же он в таком случае не понял, что поскольку стоимость монеты пропорциональна весу, то и вес будет нарастать также лавинообразно? Просто упустил из виду? Нет, этого быть не могло: император специально обратил внимание Теренция на то, что ему разрешается брать монеты до тех пор, пока он сможет поднимать их сам, без посторонней помощи. Получается, что Теренций одновременно и понял, и не понял, что имеет дело с лавиной и к чему это приведет. Иначе как *странным* такое поведение не назовешь.

Читатель, видимо, убедился, что эта история имеет как бы двойное дно. Но и его можно еще углубить. Допустим, возможны и нецелые значения k. При каком k Теренций получит наибольшую награду? Нетрудно понять, что это произойдет при таком k, когда в последний, 10 000-й день монета будет весить ровно 700 кг, т. е. составлять 140 000 брассов, что произойдет при $k = \sqrt[9999]{140\,000} \approx$ $\approx 1{,}0012$.

Тогда общий доход Теренция более чем за 25 лет хождения в казначейство составит: $S = \frac{k^{10000}-1}{k-1} \approx 120$ миллионов брассов! Это во много раз больше, чем он просил у императора. Воистину, не та лавина, что гремит, а та, что ползет. Таким образом, можно было бы посоветовать Теренцию так ответить на заманчивое с виду предложение императора:

«Государь! Такая награда слишком щедра для меня. Более того, столь быстрое уменьшение казны может нанести большой ущерб тебе и всему государству. Поэтому я не могу согласиться на такое стремительное нарастание стоимости монет. Но совсем отвергать твое предложение было бы дерзостью с моей стороны. Прошу об одном: пусть стоимость монет возрастает, но не так быстро. Меня вполне удовлетворит, если каждая монета будет тяжелее предыдущей лишь на 12 сотых процента». (Примечание. Скорее всего процентов тогда не знали. Но, думается, Теренций смог бы объяснить свое пожелание и без них).

Попытка — не пытка! Глядишь, император и впрямь проглотил бы наживку, не заметив крючка, что обернулось бы в конечном счете разорением для империи.

Здесь, правда, появляется затруднение: достоинство монет не будет выражаться целыми числами, что, возможно, в те времена не допускалось.

(Окончание см. на с. 44)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1266—М1270, Ф1273—Ф1277

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 апреля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1266» или «Ф1273». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).
Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).
В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1266. Внутри круга радиусом 1990 с центром в начале координат отмечено 555 точек с целыми координатами, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два треугольника равной площади с вершинами в этих точках.

К. Кохась

М1267. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ — некоторая перестановка из чисел 1, 2, ..., n; r_k — остаток от деления числа $a_1+a_2+...+a_n$ на n ($k=1, 2, ..., n$). Докажите, что среди чисел $r_1, r_2, ..., r_n$ по крайней мере $\sqrt{n}$ различных.

Л. Курляндчик

М1268. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка X. Прямые AX, BX, CX пересекают стороны BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1. Пусть $AB_1\cdot AC_1\cdot BC_1\cdot BA_1\cdot CA_1\cdot CB_1=\Pi$. Докажите, что площадь S треугольника $A_1B_1C_1$ равна $S=\sqrt{\Pi}/2R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

А. Гирич

М1269. На плоскости дан треугольник ABC. Прямая p параллельна прямой AB и расположена на расстоянии AC от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (p и AB), нет внутренних точек треугольника ABC. Прямая q параллельна прямой AC и расположена на расстоянии AB от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (q и AC), нет внутренних точек треугольника ABC. Прямые p и q пересекаются в точке L. Докажите, что прямая AL проходит через середину BC.

Я. Коваль

М1270. Докажите, что если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то 12^m+9^m+ $+8^m+6^m$ делится на 1991.

Н. Васильев

Ф1273. Веревка длиной l закреплена одним из своих концов в вершине сферы радиусом R (рис. 1). В некоторый момент веревку отпускают. Найти ускорение веревки сразу после этого. Трение отсутствует.

А. Быцко

Ф1274. В теплоизолированном сосуде, разделенном пополам перегородкой, находится пар, близкий к насыщению; в левой части — при температуре +20 °С, а в правой — при +50 °С. Перегородку удаляют. Какое давление установится в сосуде? Какое давление в нем будет, если нагреть содержимое до +50 °С? охладить до +20 °С? Воды в сосуде первоначально нет. Необходимые для расчета данные возьмите в таблицах.

М. Яскевич

Ф1275. Точечную частицу, имеющую массу m и заряд Q, помещают на расстоянии L от бесконечной

Задачник „Кванта"

проводящей плоскости и отпускают. За какое время частица долетит до плоскости? Сила тяжести отсутствует. (Подсказка: можно воспользоваться методом зеркальных отображений.)

А. Быцко

Ф1276. На высоте $H = 20$ м над плоскостью пола в вершинах квадрата со стороной $l = 1$ м расположены четыре одинаковых громкоговорителя. На них подается синусоидальный сигнал частотой $f = 1$ кГц. На каком расстоянии от точки максимальной громкости на полу громкость падает до нуля?

3. Рафаилов

Ф1277. Из тонкой проволоки сделали замкнутую фигуру, изображенную на рисунке 2. Радиус полуокружности равен R. Где находится центр тяжести этой фигуры? Чему равен период малых колебаний относительно точки O?

А. Черноуцан

Рис. 1.

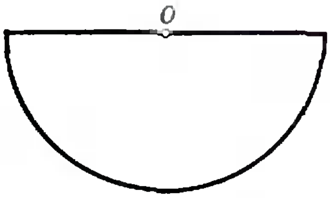


Рис. 2.

Решения задач

М1241 — М1245, Ф1253 — Ф1257

М1241. *Имеется 1990 кучек, состоящих соответственно из 1, 2, 3, ..., 1990 камней. За один шаг разрешается выбросить из любого множества кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?*

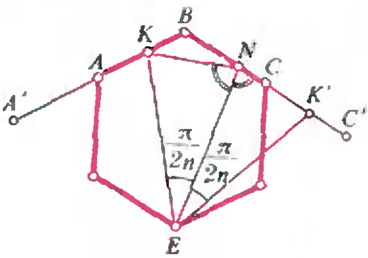
Ответ: 11. Решая эту задачу, удобно считать, что у нас имеется 1990 ящиков, в которых лежат 1, 2, ..., 1990 камней. После каждого выбрасывания камней мы будем разбивать ящики на группы, содержащие по одинаковому количеству камней. Пусть в некоторый момент имеется n групп ящиков (некоторые из них уже могут быть пустыми). Следующее выбрасывание камней происходит так: мы выбираем несколько ящиков, принадлежащих каким-то k группам, и выбрасываем из них по одинаковому количеству камней. В результате ящики, принадлежавшие до выбрасывания разным группам, по-прежнему будут содержать разное количество камней, а ящики, из которых ничего не выбрасывалось, останутся в тех же группах, где они были до этого. Тем самым, если вначале было всего n групп ящиков, то после очередного выбрасывания количество групп будет не меньше чем $\max\{n, n-k\} \geq \frac{1}{2}n$. Итак, на каждом шагу количество групп ящиков уменьшается не более чем в 2 раза.

Если вначале было 1990 различных групп ящиков, то на следующем шаге их будет не меньше чем 995, затем 498, 249, 125, 63, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Последняя группа уже может состоять из пустых ящиков. Итак, общее количество выбрасываний не меньше 11.

За 11 шагов можно выбросить все камни, если поступать так: сначала из всех ящиков, содержащих не меньше 996 камней, выбросить по 995 камней. Далее из каждого ящика, содержащего 498 и больше камней, выбросить 498 камней и так далее.

Н. Агаханов

M1242. *На двух сторонах AB и BC правильного 2n-угольника взято по точке K и N так, что угол KEN, где E — вершина, противоположная B, равен $\pi/2n$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC.*



На лучах BA и BC отложим точки A' и C' такие, что $AA'=AB$, $CC'=BC$. Точки A', B и C' — это вершины правильного $2n$-угольника, центр которого совпадает с точкой E (на рисунке показан правильный шестиугольник). При повороте на угол $\frac{\pi}{n}$ вокруг точки E точка A' переходит в B, а точка B — в C'. При этом точка K переходит в некоторую точку K' на отрезке CC'. Поскольку $EK=EK'$, $\angle KEN=\angle NEK'=\frac{\pi}{2n}$, треугольники KNE и $K'NE$ равны. Но это и значит, что $\angle KNE=\angle K'NE=\angle CNE$.

Н. Агаханов, Н. Нецветаев, Д. Терешин, Д. Фомин

M1243. *а) На доске записано уравнение $*x^2+*x+*=0$. Первый из двух играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело различные рациональные корни, или второй всегда сможет ему помешать?*

б) На доске написано уравнение $x^3+*x^2+*x+*=0$. Первый из двух играющих называет любое число, второй ставит его на место любой из звездочек; затем первый называет еще одно число, второй ставит его на место одной из двух оставшихся звездочек; наконец, первый ставит любое число на место последней

а) Ответ: может. Первый игрок выиграет, если назовет попарно различные целые числа a, b, c, сумма которых равна 0 (например 1, —3 и 2). Тогда уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}\neq 1$.

б) Ответ: может. Вот одна из возможных стратегий первого игрока. Сначала он называет число 0. Если второй игрок ставит 0 на последнее место, то в левой части оказывается многочлен вида x^3+ax^2+bx. Тогда первый называет число 2, а затем, в зависимости от действий второго игрока, ставит на оставшееся место число —3.

В итоге получается либо многочлен $x(x-1)(x-2)$, либо $x(x-1)(x+3)$.

Если второй игрок ставит 0 вместо первой звездочки, то получается многочлен вида x^3+bx+c. Тогда первый называет число $-(3\cdot 4\cdot 5)^2$. Если второй ставит его вместо b, первый полагает $c=0$. Если вместо c, то первый ставит $b=3^2\cdot 4^2-3^2\cdot 5^2-4^2\cdot 5^2$. Соответственно, получается разложение $x(x+3\cdot 4\cdot 5)(x-3\cdot 4\cdot 5)$ либо $(x+3^2)(x+4^2)(x-5^2)$.

Если, наконец, второй подставит 0 вместо второй звездочки, т. е. если получится многочлен x^3+ax^2+c, то первый называет число $6^2\cdot 7^3$, а затем *оставшейся звездочки. Может ли первый добиться того, чтобы полученное уравнение имело три различных целых корня?*

Задачник „Кванта"

полагает либо $a=-7^2$, либо $c=-6^3\cdot 7^3$. Этим случаям соответствует разложение $(x+2\cdot 7)(x-3\cdot 7)(x-6\cdot 7)$ либо $(x-2\cdot 6^2\cdot 7^2)(x+3\cdot 6^2\cdot 7^2)(x+6^3\cdot 7^2)$.

А. Берзиньш

М1244. *В сенате, состоящем из 30 сенаторов, каждые двое дружат или враждуют, причем каждый враждует ровно с 6 другими. Найдите общее количество троек сенаторов, в которых либо все три попарно дружат, либо все три враждуют друг с другом.*

Ответ: 1990.

Пусть x — *число троек сенаторов*, удовлетворяющих условию задачи, y — число остальных троек. Тогда $x+y=\dfrac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3}=4060$. Если каждый из сенаторов выпишет все тройки, в которые он входит и в каждой из которых два других сенатора одновременно или его друзья, или враги, получится список из $\dfrac{23\cdot 22}{2}+\dfrac{6\cdot 5}{2}=268$ троек. Во всех таких списках будет указано $30\cdot 268=8040$ троек. Но каждая комиссия интересующего нас типа будет указана в трех списках, а каждая другая тройка — в одном. Поэтому $3x+y=8040$. Решая систему $x+y=4060$, $3x+y=8040$, получим $x=1990$.

Д. Ф...

М1245. *На плоскости задана точка O и n векторов, сумма которых равна 0. Докажите, что можно отложить эти векторы, начав в точке O, друг за другом в таком порядке, что полученная замкнутая (быть может, самопересекающаяся) ломаная будет целиком расположена внутри или на границе некоторого угла в 60° с вершиной в точке O.*

Занумеруем данные векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ (рис. 1) так, чтобы многоугольник $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ оказался выпуклым (это можно сделать, поскольку сумма векторов равна нулю). Рассмотрим всевозможные треугольники, вершины которых совпадают с вершинами этого многоугольника и выберем из них треугольник наибольшей площади. Пусть это треугольник ABC. Через вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные его противоположным сторонам, и рассмотрим треугольник $A'B'C'$ (рис. 2). Многоугольник $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ целиком

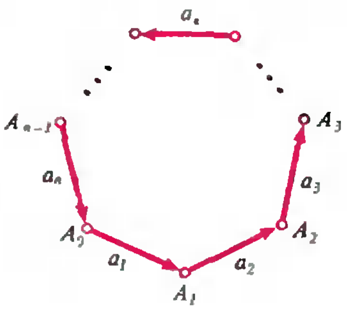


Рис. 1.

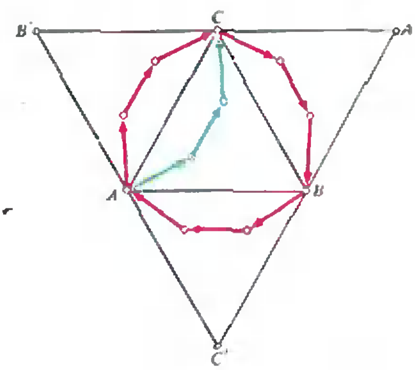
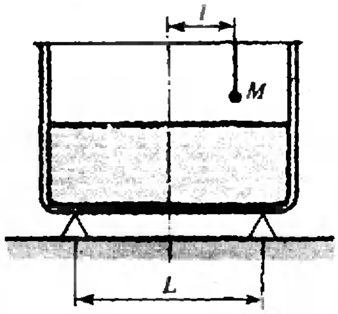


Рис. 2.

содержится в треугольнике $A'B'C'$ (иначе, подвинув какую-нибудь из его сторон мы смогли бы увеличить его площадь). Участок ломаной от вершины A до вершины B соединится внутри треугольника $AC'B$. Симметрично отразив его относительно середины отрезка AB, мы получим такой же участок, лежащий внутри треугольника ABC. Аналогично поступаем с ломаными от B до C и от C до A. Расставив нужным образом стрелки, мы получим замкнутую ломаную, целиком содержащуюся в треугольнике ABC и образованную данными векторами. Поскольку один из углов треугольника ABC не больше 60°, осталось совместить соответствующую вершину с точкой O параллельным переносом.

С. Августович, С. Севастьянов

Ф1253. *Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга. Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда (см. рисунок). Силы реакции опор при этом равны N_1 и N_2. Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы реакции опор? Плотность свинца в n раз больше плотности воды.*



Когда грузик окажется в воде, сила натяжения нити станет меньше на величину выталкивающей силы — силы Архимеда

$$F_A = Mg/n.$$

Уровень воды в сосуде при этом поднимется, и сила давления воды на дно увеличится на такую же величину (третий закон Ньютона). Для симметричного сосуда точка приложения этой добавочной силы находится в середине дна сосуда.

Очевидно, что сумма сил реакций опор останется прежней:

$$N_1' + N_2' = N_1 + N_2.$$

Поэтому, если сила N_1', действующая со стороны левой опоры, станет на величину f больше прежней, то сила N_2' станет на такую же величину меньше.

Из равенства нулю суммарного момента добавочных сил, действующих на систему:

$$2fL/2 = F_A l$$

получаем

$$f = F_A l/L = Mgl/(nL).$$

Тогда окончательно

$$N_1' = N_1 + f = N_1 + Mgl/(nL),$$
$$N_2' = N_2 - f = N_2 - Mgl/(nL).$$

А. Зильберман

Ф1254. *В морозную осеннюю ночь на спокойной поверхности озера начинает нарастать лед и за*

Так как вода не перемешивается, все тепло, которое выделяется при замерзании льда, рассеивается только в воздух. Поток тепла прямо пропорционален разности температур ΔT воды и воздуха и обратно пропор-

19 часов достигает толщины 10 см. Какой толщины достигнет лед, если такая температура продержится без изменений в течение 1000 часов? Считайте теплопроводность льда намного большей, чем теплопроводность воды. Озеро очень глубокое.

ционален толщине x льда в каждый момент времени. Поэтому для изменения Δx толщины льда за время Δt можно записать

$$\Delta x \sim \frac{\Delta T}{x}\Delta t,$$

или, учитывая, что $\Delta T = \text{const}$,

$$x\Delta x \sim \Delta t.$$

Отсюда получаем

$$x^2 \sim t, \qquad \text{и } x \sim \sqrt{t}.$$

Через 1000 часов лед достигнет толщины

$$x_{1000} = x_{10}\sqrt{1000/10} = 1 \text{ м}.$$

В. Скороваров

Ф1255. *Поверхность безжизненной планеты покрыта толстым слоем замерзшей углекислоты. Предлагается создать на ней атмосферу из чистого кислорода, разлагая углекислоту на углерод и кислород. За какое время это удастся сделать, если за 1 секунду разлагать 10^6 молей? Необходимо получить давление $p=0{,}2$ атм. Считайте, что у поверхности установится температура $T=200$ К, при которой испарением углекислоты можно пренебречь. Масса планеты $M=7{,}5\times10^{22}$ кг (примерно равна массе Луны), радиус $R=1750$ км.*

Если толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом планеты (это обязательно нужно будет проверить), то для массы кислорода можно записать:

$$m = 4\pi R^2 p/g.$$

Ускорение свободного падения g на поверхности планеты найдем из закона всемирного тяготения:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Тогда

$$m = 4\pi R^4 p/(GM) \approx 5\cdot10^{17} \text{ кг}.$$

Это примерно $1{,}5\cdot10^{19}$ молей.

Каждая молекула углекислоты дает при разложении одну молекулу кислорода, значит, процесс займет $\approx 1{,}5\cdot 10^{13}$ с $\approx 500\,000$ лет. Не так уж и много...

Для грубой оценки толщины атмосферы найдем плотность кислорода у поверхности планеты:

$$\rho = pM/(RT) \approx 0{,}4 \text{ кг/м}^3.$$

При такой плотности толщина атмосферы

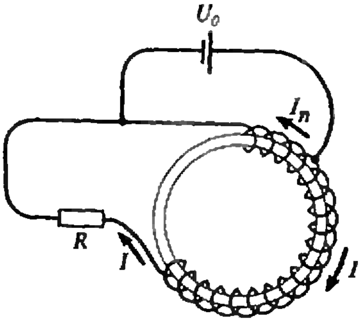
$$h = m/(4\pi R^2\rho) \approx 30 \text{ км}.$$

На самом деле толщина в несколько раз больше (плотность с высотой падает), однако и эта величина во много раз меньше радиуса планеты.

Д. Могилевцев

Ф1256. *На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью намотана катушка, содержащая $N=2000$ вит-*

По условию задачи, магнитный поток не рассеивается, поэтому вклад каждого витка в общую ЭДС индукции катушки одинаков. Но к части катушки ($n=300$ витков) подключена идеальная батарейка напряжением $U_0 = 1{,}5$ В (см. рисунок), значит, и ЭДС индукции *ков и имеющая индуктивность $L=5$ Гн. К концам катушки подключен резистор сопротивлением $R=200$ Ом. Батарейку напряжением $U_0=1,5$ В подключают между одним из концов катушки и витком номер 300, считая от этого конца. Какие токи будут течь по обеим частям катушки через время $t=0,1$ с после подключения? Батарейку считать идеальной, рассеянием магнитного потока пренебречь.*



в этой части катушки равна 1,5 В. Тогда полная ЭДС равна 10 В, и по резистору течет постоянный по величине ток

$$I=10\ \text{В}/200\ \text{Ом}=0,05\ \text{А}.$$

Этот ток возникает сразу после подключения батарейки — скачком (строго говоря, время нарастания этого тока от нуля до вычисленного значения определяется «электростатикой» — межвитковыми емкостями, однако, это время можно сделать очень малым; во всяком случае подробный анализ весьма сложен, и мы не будем этим заниматься).

Нет ли тут нарушения известного правила о том, что ток через катушку не может меняться скачком? В нашем случае все в порядке — ведь на самом деле не должен меняться скачком полный магнитный поток, а он определяется токами в обеих частях катушки. Следовательно, и в меньшей части катушки будет скачок тока сразу после включения. Сделаем расчет. Для того чтобы сразу после включения не было скачка магнитного потока, поля обеих частей катушки должны друг друга компенсировать. Поля всех витков в сердечнике складываются, значит, между токами выполняется соотношение

$$nI_{n0}=(N-1)I, \text{ и } I_{n0}=U_0(N-n)N/(n^2R)=17/60\ \text{А},$$

где I_{n0} — начальный ток в меньшей части катушки.

ЭДС индукции в малой части катушки равна U_0, и ток в ней возрастает по линейному закону. Индуктивность части катушки, в которой меняется ток, легко найти: рассеяния потока в сердечнике нет, поля всех витков складываются, следовательно, индуктивность пропорциональна квадрату числа витков. Тогда

$$L_n=Ln^2/N^2=0,125\ \text{Гн}.$$

Согласно закону Фарадея (мы будем учитывать только изменяющуюся часть магнитного потока),

$$-L_n\frac{dI_n}{dt}=U_0.$$

Поэтому окончательно

$$I_n=I_{n0}+U_0t/L_n=1,62\ \text{А}.$$

З. Рафаилов

Ф1257. *Период свободных колебаний груза, висящего на пружине, оказался равным T_0. Груз с пружиной расположили на шероховатой горизонтальной*

При движении влево и вправо груз находится под действием дополнительной (по сравнению с колебаниями груза, висящего на пружине) постоянной по величине силы — силы трения. В этих условиях меняется только «положение равновесия» (рис. 3), а период колебаний остается прежним, т. е. равным T_0.

поверхности (рис. 1) и, смещая груз влево и вправо, измерили ширину области, внутри которой груз может находиться в равновесии под действием силы трения и силы упругости пружины (так называемой зоны застоя),— она оказалась равной $2a$. В следующем опыте груз сместили из зоны застоя на расстояние, существенно превышающее a, и наблюдали колебания груза. Каким окажется период колебаний?

Теперь поставим опыт иначе. Всякий раз, когда груз при колебаниях оказывается в крайнем левом положении, по грузу стукают молоточком (рис. 2), и скорость груза становится равной v_0. Какова будет амплитуда установившихся колебаний груза?

Предполагая, что амплитуда установившихся колебаний значительно больше ширины зоны застоя, определить, на сколько период установившихся колебаний отличается от периода свободных колебаний T_0.

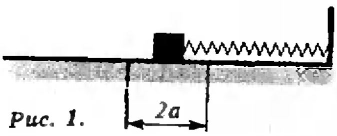


Рис. 1.

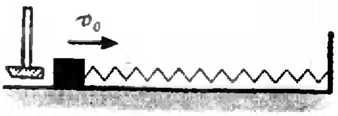


Рис. 2.

Теперь обсудим случай, когда при колебаниях груза по нему регулярно ударяют молоточком. На рисунке 4 представлен график зависимости смещения x груза от времени t (из условия задачи очевидно, что изменение ΔT периода установившихся колебаний достаточно мало по сравнению с самим периодом T_0). Как видно из графика, отклонения груза в обе стороны одинаковы относительно точки с координатой $+a$, A — искомая амплитуда колебаний. По закону сохранения энергии,

$$4A\mu mg = \frac{mv_0^2}{2},$$

причем

$$\mu mg = ka,$$

где μ — коэффициент трения, k — жесткость пружины. Отсюда получаем (учитывая, что $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$)

$$\mu g = \frac{k}{m}a = \frac{4\pi^2}{T_0^2}a.$$

Окончательно

$$A = \frac{v_0^2}{8\mu g} = \frac{v_0^2 T_0^2}{32\pi^2 a}.$$

Рассмотрим участок графика MNK (см. рис. 4). Движение здесь происходит по закону

$$x = -a - (A + 2a)\cos\omega_0 t, \text{ где } \omega_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{k/m}.$$

Скорость груза

$$v = x' = (A + 2a)\omega_0 \sin\omega_0 t.$$

В установившемся режиме участок MN отсутствует. Скорость в точке N равна начальной скорости v_0 после удара молоточком:

$$v_0 = (A + 2a)\omega_0 \sin\omega_0 \Delta T \approx A\omega_0^2 \Delta T,$$

откуда

$$\Delta T \approx \frac{v_0}{A\omega_0^2} = \frac{32\pi^2 a}{v_0^2 T_0^2}\frac{v_0 T_0^2}{4\pi^2} = \frac{8a}{v_0}.$$

О приближенном решении. Условие $A \gg 2a$ означает

$$\frac{v_0^2 T_0^2}{32\pi^2 a} \gg 2a,$$

откуда

$$v_0 T_0 \gg 8\pi a. \qquad (*)$$

Условие $\Delta T \ll T_0$ означает

$$\frac{A\omega_0^2}{v_0} \ll T_0, \qquad \text{или } v_0 T_0 \gg 16\pi a. \qquad (**)$$

Задачник «Кванта»

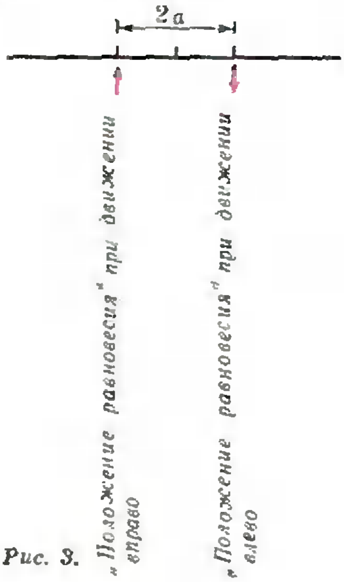


Рис. 3.

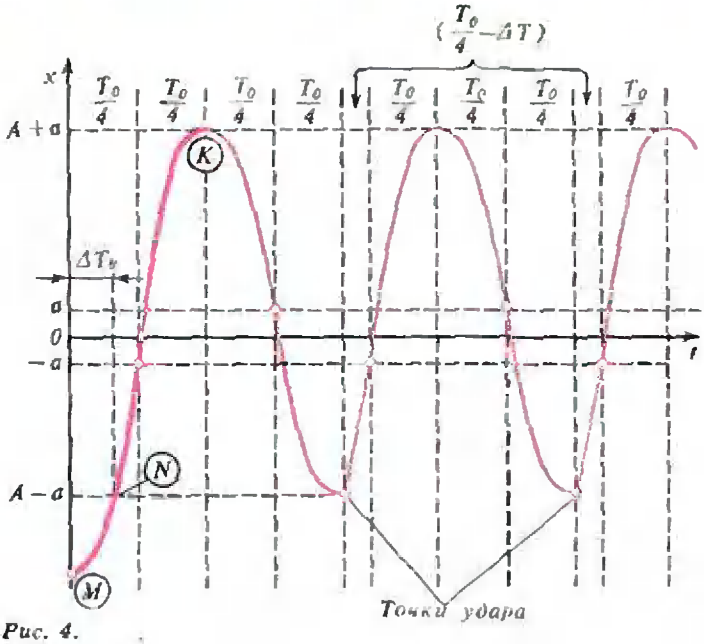


Рис. 4.

Выражения (*) и (**) практически совпадают. Значит, принятое приближение оправдано.

С. Козел

Конкурс «Математика 6 — 8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журнала «Квант» и «Математика».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 апреля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

16. Слово МАРШРУТ можно прочесть на рисунке 1 разными способами. Сколько таких способов? Какую букву нужно убрать, чтобы количество способов равнялось 145?

В. Радунский

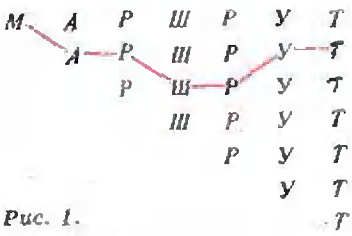


Рис. 1.

17. Несколько тракторов вспахивают поле в 300 га за целое число дней, причем каждый трактор вспахивает в день 15 га. Сколько тракторов потребуется дополнительно для того, чтобы выполнить работу на 6 дней раньше?

И. Акулич

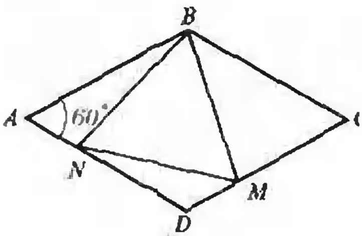


Рис. 2.

18. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60°. Докажите, что если один из углов треугольника BMN (рис. 2) равен 60°, то и остальные тоже равняются по 60°.

В. Произволов

Задачи

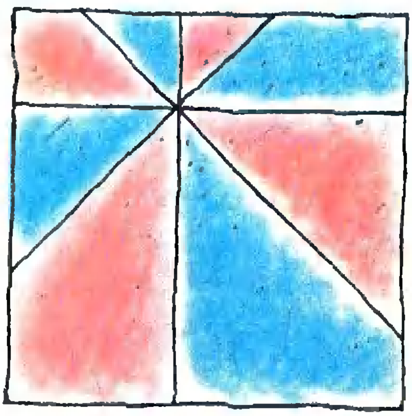
1. Рассказывают, что основательница чешского государства принцесса Либуша предложила трем претендентам на ее руку загадку. «Если бы я дала первому жениху половину слив из этой корзины *и еще одну сливу*, второму половину остатка и еще одну сливу, а третьему половину того, что останется и еще три сливы, то корзина опустела бы. Сколько слив в корзине?» А вы как думаете?

2. Докажите, что сумма n *последовательных* нечетных чисел делится на n.

3. При возведении в квадрат некоторого двузначного числа, состоящего из одинаковых цифр, получится число, у которого первая и вторая цифры одинаковы, а также одинаковы третья и четвертая. Найдите это двузначное число.

4. На рисунке изображен арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Из какого наименьшего количества елок может состоять ЛЕСОК? (Буквам Е и Ё соответствует одна *и та же цифра*.)

5. Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей, окрашенных в красный цвет, равна сумме площадей, окрашенных в синий цвет.



Эти задачи нам предложили А. Савин, С. Сефибеков, О. Повалюхина, Е. Горбунов и В. Произволов.

ЧИСЛОВЫЕ ФОКУСЫ

Предлагаем вашему вниманию небольшой фрагмент из недавно вышедшей книги «За страницами учебника математики» (М.: Просвещение, 1989). Мы надеемся, что любопытные фокусы с числами будут вам интересны и советуем прочитать эту замечательную книгу.

Профессор
И. ДЕПМАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Н. ВИЛЕНКИН

Вы можете удивить своих товарищей, показывая им числовые фокусы. Вот один из них. Предложите одному из них написать трехзначное число. Другой пусть припишет к нему то же самое число, третий разделит полученное шестизначное число на 7, четвертый разделит это частное на 11, а пятый разделит то, что получилось на 13 и передаст первому. Тот увидит задуманное им число. Разгадка в равенстве

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Ведь если рядом с трехзначным числом еще раз написать это же число, то первоначальное число умножится на 1001 (например, $289\,289 = 289 \times 1001$). А при последовательном делении на 7, 11 и 13 полученное число разделится на 1001, и мы снова получаем исходное число.

Фокус с двузначными числами очень похож на этот. Только числа надо повторить два раза, а полученное шестизначное число делить на 3, 7, 13 и 37. Это объясняется тем, что $10\,101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. А четырехзначные числа повторяются один раз и делят на 73 и 137. Разгадка в равенстве $10\,001 = 73 \cdot 137$.

Предложите кому-нибудь задумать двузначное число, а потом возвести его в куб. Услышав ответ, вы мгновенно сообщаете, какое число было задумано. Для этого, правда, придется выучить наизусть кубы чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вот они: $0^3=0$, $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$.

Заметим, что кубы чисел 0, 1, 4, 5, 6 и 9 оканчиваются той же цифрой (например, $4^3=64$, $9^3=729$), а числа 2 и 8, 3 и 7 образуют пары, в которых куб одной цифры оканчивается другой.

Пусть возводили в куб число 67. Получили ответ 300 763. Услышав это значение, отгадывающий замечает, что 300 лежит между 216 и 343, то есть между 6^3 и 7^3, а потому цифра десятков равна 6. Последняя цифра ответа 3 получается при возведении в куб числа 7. Значит, цифра единиц равна 7. Мы отгадали задуманное число: 67. После небольшой тренировки отгадывание происходит мгновенно.

Более впечатляющим является отгадывание двузначного числа по его пятой степени. Ведь чтобы возвести число в пятую степень, придется четыре раза делать умножение, а в ответе может получиться десятизначное число! А отгадка основана на том, что при возведении чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в пятую степень получается число, оканчивающееся той же цифрой, которую возводили в степень (например, $1^5=1^5$, $2^5=32$, $3^5=243$, $4^5=1024$, а $5^5=3125$).

Кроме того, надо запомнить следующую таблицу, показывающую, с чего начинаются пятые степени следующих чисел:

10	100 тыс.
20	3 млн.
30	24 млн.
40	100 млн.
50	300 млн.
60	777 млн.
70	1 млрд. 500 млн.
80	3 млрд.
90	6 млрд.
100	10 млрд.

Поэтому, услышав, что при возведении двузначного числа в пятую степень получится ответ 8 587 340 257, сразу соображаем, что 8 миллиардов лежат между 6 миллиардами и 10 миллиардами, а потому цифра десятков равна 9. А услышав, что ответ кончается цифрой 7, понимаем, что той же цифрой кончается и двузначное число. Значит, возводили в пятую степень число 97.

На доске написано пятизначное число. Два школьника подходят к доске. Первый пишет любое пятизначное число, второй пишет свое число. Потом первый пишет еще одно пятизначное число, а второй — свое число, а затем они поступают так же еще раз. После этого второй школьник сразу пишет сумму всех написанных на доске чисел.

Этот фокус заключается в следующем. Каждый раз, после того как первый школьник написал свое число, второй пишет число, цифры которого служат дополнениями до 9 стоящих на том же месте цифр первого числа (если первый написал число 40 817, то второй пишет 59 182). Сумма двух таких чисел всегда равна 99 999. Поэтому после трех раз будет (кроме самого первого числа) шесть чисел, сумма которых равна $3\cdot 99\,999=300\,000-3$. Значит, надо приписать к первоначально написанному на доске пятизначному числу впереди цифру 3, а из полученного числа отнять 3.

Чтобы зрители не разгадали фокуса, можно уменьшить первую цифру какого-нибудь из чисел на несколько единиц и на столько же единиц уменьшить соответствующую цифру в сумме. Например, здесь

$$\begin{array}{r} 76\,281 \\ 14\,391 \\ 65\,608 \\ 24\,380 \\ 75\,619 \\ 95\,073 \\ 4\,926 \\ \hline 356\,278 \end{array}$$

уменьшена на 2 первая цифра в третьем слагаемом и на столько же соответствующая цифра в сумме.

Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Неожиданность обратной задачи

Известно, что теоремой, обратной к данной, называется такая теорема, условием которой служит заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Предлагаем шесть задач в виде «прямых» теорем. Все они весьма просты и известны младшим школьникам. Докажите теоремы, обратные к этим «прямым» теоремам, самостоятельно. Вы убедитесь, что все доказательства обратных теорем значительно труднее, чем «прямых» теорем.

Прямые теоремы

1. В трапеции отрезок, соединяющий середины оснований, делит ее на две равновеликие фигуры.

2. В параллелограмме сумма расстояний между серединами противоположных сторон равна его полупериметру.

3. Если точка H — ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC, то $\angle HBA = \angle HCA$, $\angle HAB = \angle HCB$.

4. Если точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то $\angle OAB - \angle OBA = \angle OBC - \angle OCB = \angle OCA - \angle OAC$.

5. В равнобедренном треугольнике центр вписанной в треугольник окружности принадлежит прямой Эйлера. (Прямая Эйлера — это прямая, которой принадлежит ортоцентр, точка пересечения медиан и центр описанной около треугольника окружности.)

6. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

Указания к доказательствам обратных теорем

1. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина AD, точка N — середина BC. Докажите, что $S_{ABN} = S_{DCN}$. Тогда $AD \parallel BC$, т. е. $ABCD$ — трапеция.

2. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 1). Пусть точки M, N, E — середины отрезков AB, DC и AC соответственно. Тогда $AD \parallel EN$ и $EN = \frac{1}{2} AD$, $BC \parallel ME$ и $ME = \frac{1}{2} BC$. Так как $MN \leqslant ME + EN$, то $MN \leqslant \frac{AD+BC}{2}$. Пусть L и K — середины сторон BC и AD. Аналогично, $LK \leqslant \frac{AB+CD}{2}$. По условию $MN + LK =$

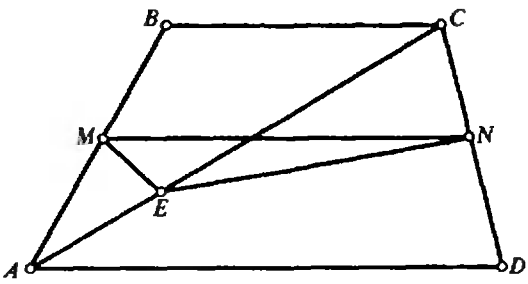


Рис. 1.

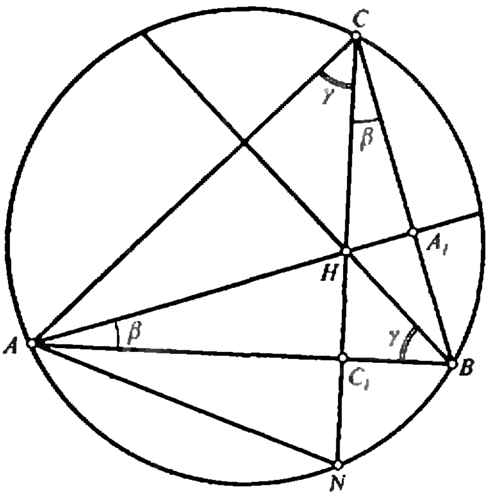


Рис. 2.

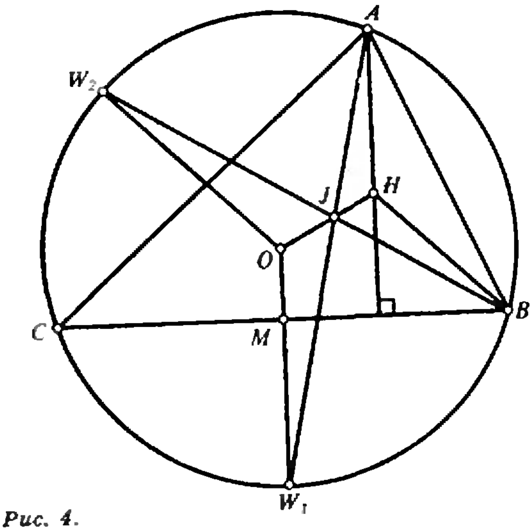


Рис. 4.

$=(AB+BC+CD+AD)/2$. Таким образом, должны достигаться оба равенства: $MN=(AD+BC)/2$, $LK=(AB+$ $+CD)/2$, а это возможно лишь при условии, что точка E принадлежит отрезкам MN и LK, откуда $BC \| MN \| AD$ $AB \| LK \| CD$.

3. Опишите около треугольника ABC окружность и проведите отрезок CC_1 до пересечения с ней в точке N (рис. 2). Докажите, что если $\angle HAB=$ $=HCB$, $\angle HBA=\angle HCA$, то точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Так как $\angle BAN=\angle BCN$, то $\angle HAB=\angle BAN$, аналогично, $\angle HBA=\angle ABN$, откуда $C_1H \perp AB$. Докажите, что $\angle AA_1C=90°$. Обозначим $\angle HAC=\alpha$, $\angle HAC_1=\beta$, $\angle HBA=$ $=\gamma$. Так как $\triangle ACC_1$ прямоугольный, $\alpha+\beta+\gamma=90°$. Используя то, что $\triangle CC_1B$ прямоугольный, докажите, что $\angle HBC=\alpha$. Обозначим $\angle AA_1B=x$.

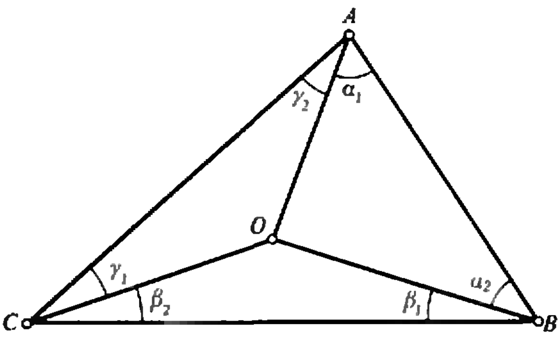


Рис. 3.

Рассматривая $\triangle AA_1B$, получим $x+$ $+\alpha+\beta+\gamma=180°$. Отсюда $x=90°$.

4. Докажите, что точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности (рис. 3). Обозначим углы, данные в условии, через α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. Для определенности будем считать $\alpha_1>\alpha_2$, $\beta_1>\beta_2$, $\gamma_1>\gamma_2$. Тогда из образовавшихся треугольников получим $OB>OA$, $OC>OB$, $OA>OC$. Откуда $OB>OC$ — мы получили противоречие.

5. Докажите, что если центр вписанной в треугольник окружности I принадлежит прямой Эйлера, то треугольник равнобедренный. Пусть O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр, M — середина стороны BC, W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной около треугольника ABC окружностью, W_2 — точка пересечения биссектрисы угла ABC с описанной окружностью (рис. 4). Рассмотрите подобные треугольники OW_1I и HAI, OW_2I и HBI. Так как $OW_1=OW_2$, то $AH=BH$, откуда $AC=BC$.

6. Формулировка обратной теоремы звучит так: если в треугольнике ABC равны биссектрисы $l_a=l_b$ (рис. 5), то равны также и длины сторон: $a=b$. Доказательство проведем от противного. Пусть, например, $a>в$. Тогда $\alpha>\beta$ (в треугольнике против большей

(Продолжение см. на с. 42)

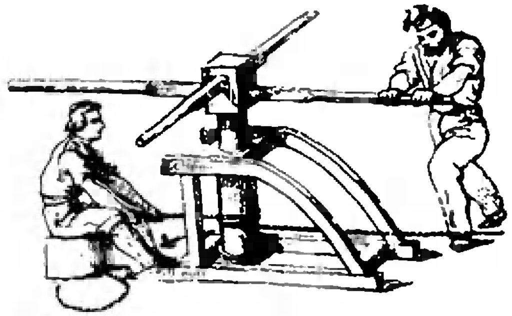
Калейдоскоп „Кванта"

...наш принцип требует, чтобы количество работы, которое получается, когда тела системы переходят из начального положения во второе, и количество работы, которое затрачивается, когда они переходят из второго положения в первое, всегда было одно и то же, каков бы ни был способ перехода, путь перехода или его скорость.

Г. Гельмгольц

А так ли хорошо знакома вам

работа ?



В обиходном смысле этого слова — надеемся, да. А в физическом?

Понятие «работа» долгое время было на периферии точной науки. Но потребность применить теоретические результаты и методы к задачам прикладного характера, в теории машин и механизмов заставила осмыслить его и включить в ряды строгих физических понятий. И Гельмгольц использовал физическое понятие «работа» при формулировании закона сохранения энергии.

Особенный интерес вызывает рассмотрение работы, совершаемой в различных физических полях — гравитационном, электрическом, магнитном. Общий подход к возникающим здесь задачам позволяет лучше познакомиться с понятием поля. Итак, ключ для работы с этим выпуском «Калейдоскопа» — «работа в полях».

Вопросы и задачи

1. Одинаковую ли работу нужно совершить, чтобы равномерно поднять тело вертикально вверх на высоту H и равномерно переместить то же самое тело по горизонтальному пути на расстояние, равное H?

2. Какая работа будет совершена, если силой 30 Н поднять груз массой 2 кг на высоту 5 м?

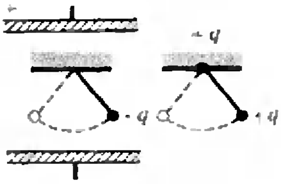
3. Изменится ли работа, производимая двигателем эскалатора, если пассажир, стоящий на равномерно движущейся вверх лестнице эскалатора, начнет сам равномерно подниматься по ней?

4. Тело свободно падает с некоторой высоты. Одинаковую ли работу совершает сила тяжести за последовательные равные промежутки времени?

5. К двум гвоздям, находящимся на одной высоте, прикреплены концы цепочки длиной l и концы двух шарнирно связанных между собой стержней, общая длина которых тоже равна l. Чей центр тяжести расположен ниже — цепочки или стержней?

6. Планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого расположено Солнце. В какой точке траектории скорость планеты будет максимальной и в какой — минимальной?

7. Какое электрическое поле — однородное или неоднородное — ближе по своим свойствам к полю силы тяжести у поверхности Земли?

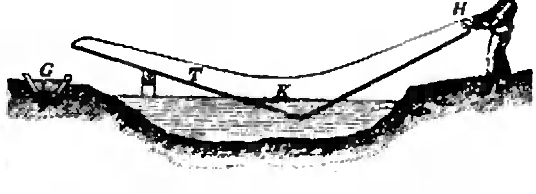


8. Отличаются ли периоды колебаний маятников одинаковой массы и длины в условиях, показанных на рисунке?

9. Проводящий шар B находится в электрическом поле шара A. Является ли при этом поверхность шара B эквипотенциальной поверхностью?

10. Напряженность поля равномерно заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее. Означает ли это, что если под действием такого поля перемещается заряд, то может совершиться бесконечно большая работа?

11. За счет чего увеличивается энергия плоского заряженного конденсатора, не под-



ключенного к источнику тока, если из него удаляется диэлектрик, в качестве которого использована, например, тонкая стеклянная пластина?

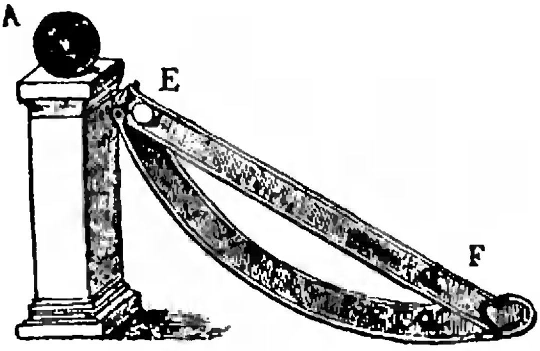
12. Почему сила Лоренца не совершает работы?

13. Одинаковую ли работу необходимо произвести, чтобы вставить магнит в катушку, когда ее обмотка замкнута и когда разомкнута?

14. Если нет перемещения тела, то нет и работы в механическом смысле. На что же расходуется энергия, подводимая к электромагниту, когда он «держит» груз?

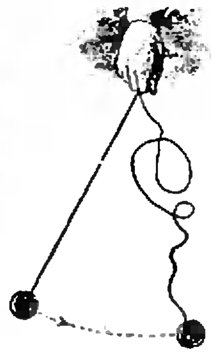
Микроопыт

Попробуйте изготовить и испытать модель «вечного двигателя», изображенного на рисунке. Почему этот двигатель не работает?



Любопытно, что...

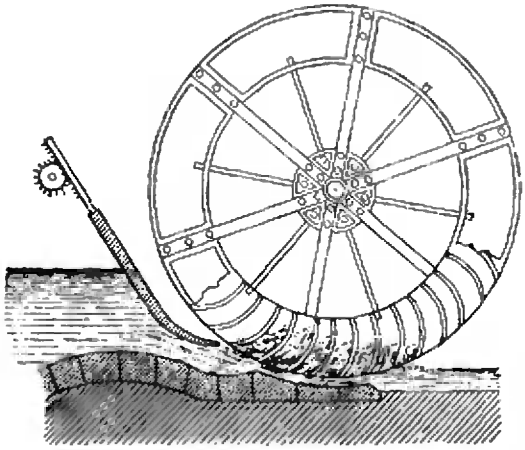
...понятие «работа» отсутствовало в механике Ньютона. Не было его и в учебниках физики первой трети XIX века. Физикам оно было попросту неведомо. Впервые понятие работы подробно развил Жан Виктор Понселе, математик и инженер, бывший, кстати, солдатом наполеоновской армии и русским военнопленным, что не помешало ему позднее стать иностранным членом - корреспондентом Петербургской академии наук.

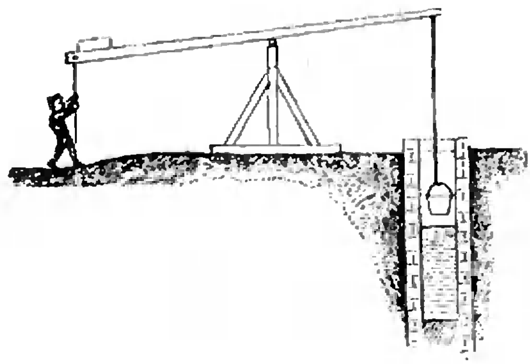


...движение бусинки, соскальзывающей без трения вдоль проволоки произвольной формы, служит хорошей иллюстрацией замечательного факта независимости работы, произведенной над телом, от пути, по которому оно перемещалось. Исследование такого рода задач привело физиков XVIII века к введению понятия энергии.

...отмеченное выше свойство независимости работы от пути характерно для так называемых консервативных сил. Оказывается, что все четыре типа фундаментальных сил, действующих между элементарными частицами, являются консервативными.

...в последнее время проявляется все больший интерес к проблеме ускорения не только микрочастиц, но и макроскопических тел электромагнитным полем. Скорость, до которой удалось разогнать грузы массой уже в несколько граммов, близка к первой космической скорости.





Что читать о работе в «Кванте»
(публикации последних лет)

1. «Сила Лоренца и ее работа» — 1979, № 2, с. 52;

2. «Механическая работа и механическая энергия» — 1985, № 5, с. 46;

3. «О судьбе некоторых понятий механики» — 1986, № 5, с. 20;

4. «Закон сохранения энергии в электростатике» — 1989, № 6, с. 63;

5. «Калейдоскоп «Кванта» — 1985, № 4; 1986, № 5; 1987, № 5; 1989, № 4; 1990, № 4.

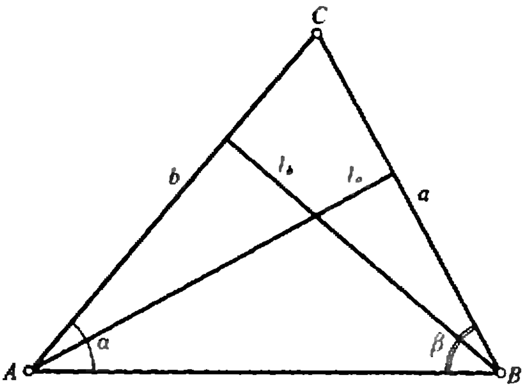


Рис. 5.

стороны лежит больший угол). Длины биссектрис в треугольнике вычисляются по формулам:

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},\quad l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$$

(докажите их самостоятельно). Поскольку $\alpha>\beta$, причем $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$, то $\cos\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\beta}{2}$. Кроме того, $\frac{b}{b+c}<\frac{a}{a+c}$. В самом деле,

$$\frac{a}{a+c}-\frac{b}{b+c}=\frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)}>0.$$

Таким образом, получаем $l_a<l_b$ — противоречие.

Эта теорема — классический пример, демонстрирующий, что даже у совсем очевидной теоремы обратное утверждение может оказаться далеко не столь простым (а порой и неверным!). А вы знаете такие примеры?

И. Кушнир

Уравнение касательной к графику функции

Понятие касательной в школе, в первую очередь, связано с окружностью, вернее, с определением касательной к окружности: прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной. В математическом анализе мы сталкиваемся уже с касательной к графику функции и обнаруживаем, что касательная может иметь с кривой не одну, а несколько общих точек (рис. 1, *а*, *б*).

Пусть график функции $y=f(x)$ изображается некоторой кривой (рис. 2). Рассмотрим секущую, проходящую через две точки этой кривой: $(x_0;\ f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$. Будем приближать вторую точку к первой ($h=\Delta x\to 0$). Секущая займет некоторое предельное положение. Эта предельная прямая называется *касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку $(x_0;\ f(x_0))$, конечно же, хорошо вам знакомо: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Но как «увидеть» это уравнение, в чем его геометрический смысл? Во-первых, полезно убедиться, что это действительно *уравнение прямой*. Перепишем уравнение в виде $y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$. Таким образом, переменная y линейно зависит от x, следовательно, точки с координатами $(x;\ y)$, удовлетворяющими уравнению, лежат на прямой. Эта прямая проходит через точку $(x_0;\ f(x_0))$, так как $y=f(x_0)$ при $x=x_0$. Ее угловой коэффициент равен $f'(x_0)$, тангенс угла наклона секущей $\operatorname{tg}\alpha_h=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис. 2). Поэтому при $\Delta x\to 0$ мы получаем производную функции $f(x)$ в точке x_0 по самому ее определению: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Значит, наша прямая — касательная!

Заодно мы вспомнили геометрический смысл производной: производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту наклона касательной к графику функции в этой точке. Теперь каждый сам легко выведет уравнение касательной, ведь свободный член $f(x_0)-f'(x_0)x_0$ в нем сразу определяется условием $y=f(x_0)$ при $x=x_0$.

Уже на уровне этих элементарных рассуждений мы можем сделать некоторые важные выводы и решать многие содержательные задачи.

Во-первых, по знаку тангенса угла наклона касательной к графику функ-

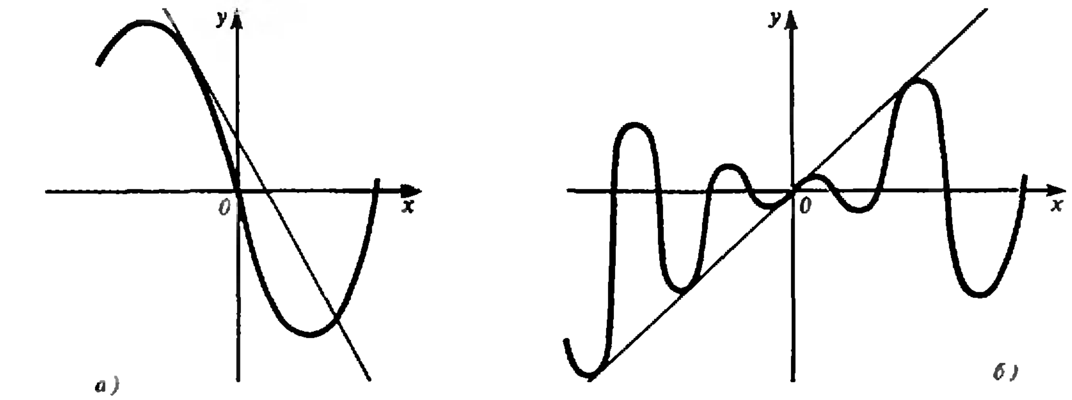


Рис. 1.

ции (т. е. по знаку производной функции) в точке x_0 мы можем судить о возрастании (или убывании) функции в этой точке. Во-вторых, по численному значению этого тангенса (т. е. по численному значению производной) мы можем судить о «скорости» возрастания (или убывания) функции в точке x_0.

Обратимся теперь к задачам.

Задача 1. *Касательная к графику функции $y=x^2+2x-3$ наклонена к оси абсцисс под углом $\pi/4$. Найдите координаты точки касания.*

Решение. Из условия задачи вытекает, что $f'(x_0)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. $f'(x)=2x+$ $+2$, значит, $2x_0+2=1$; $x_0=-\frac{1}{2}$, $y_0=-3\frac{3}{4}$.

Задача 2. *Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2-5x+7$ в точке (2; 1)?*

Решение. Первым делом убедитесь, что точка (2; 1) принадлежит графику функции. Так как значение производной функции $y=x^2-5x+7$ (т. е. $y'=2x-5$) равно тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции в данной точке, то $\operatorname{tg}\alpha=$ $=2x_0-5=-1$. Значит, касательная образует с осью абсцисс угол $\alpha=135°$.

Следующая задача — интереснее.

Задача 3. *Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=$ $=x^2-4x+3$, проходящей через точку M (2; —5).*

Основываясь на большом опыте, автор утверждает, что, к сожалению, многие учащиеся подходят формаль-

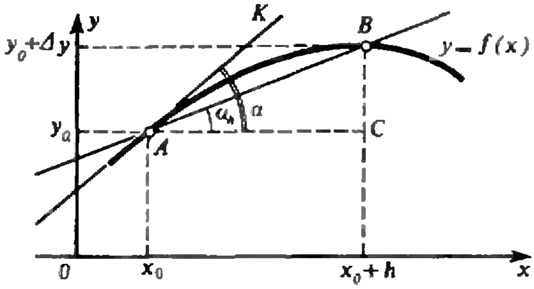


Рис. 2.

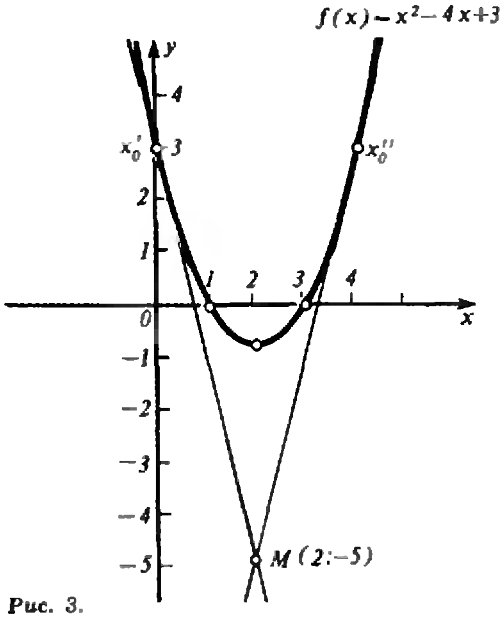


Рис. 3.

но к решению этой задачи: так как уравнение касательной $y=f(x_0)+$ $+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, то они найдут значение производной данной функции в точке $x_0=2$, положат $f(x_0)=-5$, подставят все в уравнение касательной и, конечно, получат ошибочный результат.

Однако, очевидно, что точка M (2; —5) не лежит на параболе $f(x)=x^2-4x+3$ (в чем легко убедиться, хотя бы подставив координаты точки в уравнение параболы) и касательных будет две (рис. 3), соответственно будет и две точки касания x_0' и x_0''.

П р а в и л ь н о е р е ш е н и е. Уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-4x+3$ (с учетом, что $f'(x)=2x-4$) будет иметь вид $y=x_0^2-4x_0+3+(2x_0-4)\cdot(x-x_0)$, где x_0 — точка касания, x и y — текущие координаты уравнения касательной.

С другой стороны, так как касательная должна проходить через точку M (2; —5), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению касательной. Получаем: $-5=x_0^2-4x_0+3+(2x_0-4)\cdot(2-x_0)$.

После очевидных преобразований получаем квадратное уравнение относительно x_0: $x_0^2-4x_0=0$, откуда находим два решения: $x_0'=0$, $x_0''=4$.

Значит, уравнения касательных будут $y=-4x+3$ и $y=4x-13$.

З а д а ч а 4. *Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x)=x^2-2x+5$ и $g(x)=x^2+2x-11$.*

Р е ш е н и е. Обозначим точку касания с графиком функции $f(x)$ x_1, а с графиком функции $g(x)$ — x_2. Уравнения касательных к графику каждой из парабол имеют вид

$$y=(2x_1-2)\cdot x+5-x_1^2,$$
$$y=(2x_2+2)\cdot x-11-x_2^2.$$

Общей касательной к обеим параболам будет некоторая прямая $y=kx+b$, значит, угловой коэффициент k и свободный член b в полученных уравнениях касательных должны совпадать. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-2=2x_2+2, \\ 5-x_1^2=-11-x_2^2. \end{cases}$$

Откуда $x_1=5$, $x_2=3$.

Искомое уравнение имеет вид $y=8x-20$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-4$ образует с осью абсцисс угол 45°?

2. Под каким углом к оси абсцисс наклонена касательная, проведенная к кривой $y=2x^3-x$ в точке пересечения этой кривой с осью ординат?

3. Прямая $y=6x-7$ касается параболы $y=x^2+bx+c$ в точке A (2; 5). Найдите уравнение параболы.

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A (3; 2) и касающейся графика функции $y=x^2-2x$.

5. Найдите площадь треугольника, образованного осью абсцисс и касательными, проведенными к графику функции $y=\frac{1}{2}x^2-x+5$ из точки A (0; 3).

6. Найдите уравнение общей касательной к параболам $y=x^2+8x+4$ и $y=x^2+4x+8$.

В. Затакавай

Странный император и странный полководец

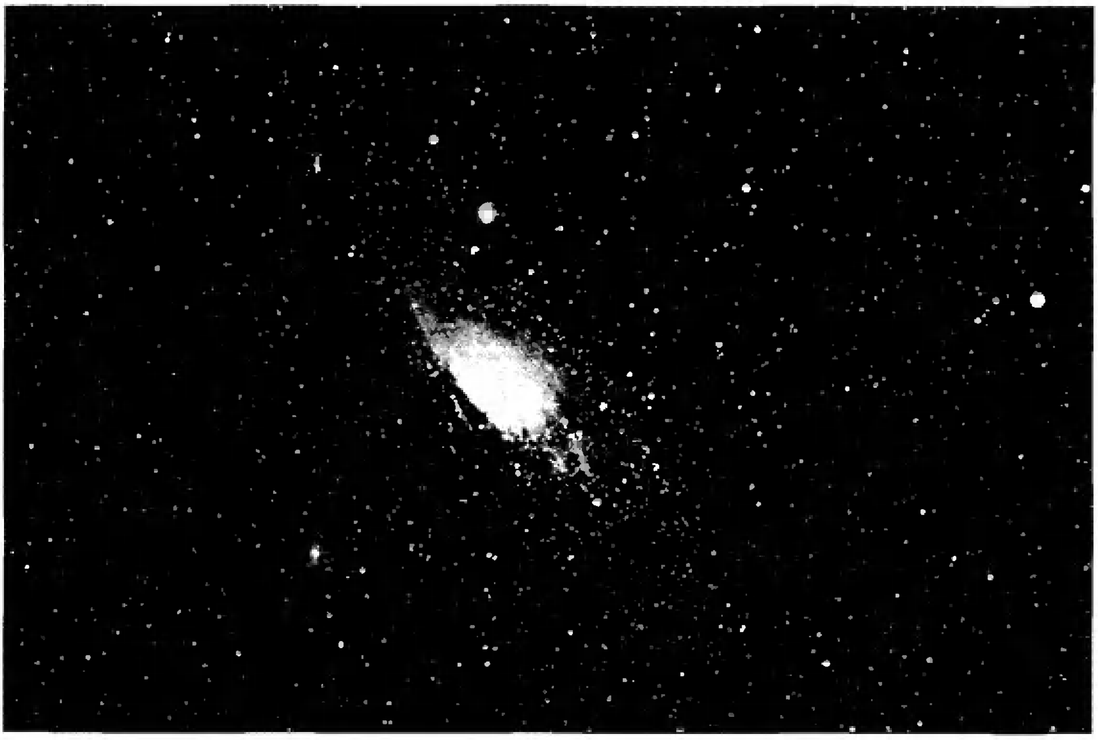
(Начало см. на с. 22)

Ничего, Теренций и здесь мог внести великодушную поправку: пусть, мол, при изготовлении монет вычисленный вес очередной монеты округляется в меньшую сторону! Такое великодушие не очень ударит по карману Теренция: ущерб, заведомо меньший 10 000 брассов, просто мизерен по сравнению с доходом.

Конечно, нам с вами легко решать финансовые проблемы отважного полководца. А вот что ответил бы сам Теренций на предложение автора? Не исключено, что он нашел бы его по меньшей мере *странным*. Ведь основную часть своей награды ему пришлось бы ждать целых 20 лет. За первые 5 лет Теренций получил бы менее 6600 брассов, а первые полтора года ему пришлось бы каждый день приходить за монеткой в 1 брасс! Так кто же из всех троих самый *странный:* император, полководец или автор? Решать читателям. А все же интересно, что сказал бы сам Я. И. Перельман по поводу такого толкования его рассказа? Смею надеяться, что оно бы его изрядно позабавило.

Несколько орнаментов по мотивам Эшера

Работы известного художника Мориса Эшера обладают какой-то магической притягивающей силой. «Квант» неоднократно обращался к его удивительным, а порой странным картинам (см., например, статью С. Табачникова «Мир Эшера», № 12, 1990). Творчество Эшера отражает многие математические идеи. Так, его орнаменты могут напомнить опытному математику о кристаллографических группах. Предлагаем несколько вариаций на тему Эшера, принадлежащих нашей читательнице О. *Парнасской*. Попробуйте уловить в этих орнаментах идею симметрии шестого порядка.



Р-значит ракета

Ближайшие задачи в космосе

Доктор технических наук
К. ФЕОКТИСТОВ

В настоящее время еще нет сложившегося единого мнения о наиболее важных направлениях развития деятельности человечества в космосе. Предлагаются самые разнообразные программы.

Например, программа, которую связывают с именем американки — астронавта Салли Райд, предусматривает в качестве основных целей на ближайшие 50 лет исследования и создание баз на Луне, астероидах и планетах, создание средств путешествий в Солнечной системе, создание космических поселений.

Советские ученые, работающие в области фундаментальных наук, считают необходимым в ближайшее десятилетие сосредоточить усилия на изучении околоземного космического пространства, магнитосферы Земли, на исследованиях солнечно-земных связей, Солнца, солнечной короны, Марса, на астрофизических исследованиях с помощью автоматических космических аппаратов.

Есть и более прагматические предложения, которые нацелены на развитие спутниковых систем связи и телевидения, систем метеорологических спутников, на создание спутниковых систем экологического контроля и исследования природных ресурсов Земли, создание экономически целесообразного и эффективного производства на орбите.

Так что есть самые различные тенденции. И, наверное, было бы неправильно противопоставлять прагматические устремления естественному желанию людей расширить сферу своей деятельности, больше узнать о Вселенной и о нашем месте в ней. Представляется наиболее разумным при выборе дальнейшего пути стремиться и к удовлетворению насущных нужд человечества, и к исследованию окружающего мира.

К наиболее острым проблемам, стоящим сегодня перед человечеством, относятся

— экология, истощение природных ресурсов,

— политическая нестабильность в мире, разобщенность народов, деление государств на противостоящие блоки, недоверие между ними и т. п.,

— возрастающая перенаселенность Земли.

В исследованиях Вселенной, как мне сегодня представляется, к наиболее интересным задачам относятся

— исследования Солнечной системы,

— исследования звезд, галактик, небесных объектов на окраинах Вселенной с помощью астрофизических инструментов,

— исследования возможностей полетов к звездам.

При таком подходе можно было бы предложить следующие основные направления космических работ.

Деятельность в интересах удовлетворения насущных нужд человечества

Речь идет о работах прикладного характера, которые могли бы приносить конкретную пользу людям и по возможности были бы экономически рентабельны. Здесь можно выделить три группы работ.

— Группа А: уже определившиеся, почти ставшие традиционными, такие работы, как экологический контроль поверхности суши, морей и океанов с помощью космических аппаратов, спутниковая метеорологическая служба, спутниковая навигация для судов, самолетов, наземного транспорта, спутниковые системы для приема сигналов от терпящих бедствие, связь и телевидение.

— Группа Б: работы, связанные с развертыванием на орбите экономически выгодного производства, с выносом на орбиту нужных, но опасных на поверхности Земли производств. Для организации этих работ потребуется расширить наземные и, главное, космические эксперименты по поиску надежных и эффективных технологических процессов на орбите. К этой же группе работ можно отнести и поисковые работы по возможности и целесообразности создания солнечных орбитальных электростанций для снабжения Земли дешевой и экологически чистой электроэнергией.

Сюда же можно отнести работы на орбитальных станциях по определению области наиболее эффективной деятельности людей непосредственно на орбите, так как до сих пор эта область не найдена и остается неясным, где, при выполнении каких работ человек эффективнее автоматических устройств.

— Группа В: работы в интересах поддержания мира на Земле, поддержания стабильности и укрепления доверия между государствами, предотвращения агрессии. Здесь имеется в виду создание международной, открытой для всеобщего ознакомления спутниковой системы наблюдения и контроля земной поверхности и воздушного пространства, подводной обстановки. Предлагается создать системы спутников, которые бы давали всем возможность видеть, что происходит на Земле, и днем и ночью, наблюдать за перемещениями воинских соединений и военной техники, за строительством подозрительных (возможно, военных) объектов, контролировать выполнение международных соглашений. Сейчас практически только Советский Союз и Соединенные Штаты Америки имеют спутниковые разведывательные системы, которые пока не носят всепогодный характер и не дают достаточно качественной картины в сумерках и в ночное время.

Конечно, есть что-то непорядочное в подглядывании друг за другом. Но что нам делать в наше время? XX век не один раз демонстрировал, как уголовники и маньяки захватывали власть или просачивались к ней. И как, укрепившись внутри государства с помощью террора и оболванивания своих соотечественников, они пытались захватить соседние государства. Наличие международной спутниковой системы наблюдения позволит мировому сообществу, заинтересованным людям (а не благополучным и равнодушным чиновникам) заблаговременно подготовиться к отражению агрессии или даже остановить ее подготовку.

Современная космическая техника в принципе позволяет решить эту задачу, причем важно и то, что расходы на создание и эксплуатацию такой системы могло бы нести все мировое сообщество.

Исследование и освоение Солнечной системы

К этому направлению работ относятся

— исследования Солнца,

— исследования астероидов,

— исследования Луны, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна и т. д.,

— исследования возможности и целесообразности космических поселений.

Едва ли эти исследования принесут нам принципиально новую информацию, но не рассмотреть то, что у нас под носом, было бы просто неразумно. Вести исследования можно с помощью автоматических космических аппаратов. И только в случае полной неудачи с доставкой проб грунта и атмосферы с Марса и, в то же время, при появлении информации, указывающей на возможность обнаружения живых организмов на Марсе, стоит всерьез рассмотреть организацию пилотируемой экспедиции на Марс. (Подразумевается, что пробы грунта и атмосферы будут доставляться на Землю для их изучения с тем, чтобы определить, нет ли в них живых организмов, а если они есть — узнать их генетический код или их механизм воспроизводства и тем самым получить информацию в пользу той или иной гипотезы о происхождении жизни: гипотезы «самозарождения» или «посева».)

Исследования Вселенной

Это наиболее интересные, можно сказать, интригующие направления исследований. Они могут принести нам наиболее ценную и необычную информацию. К этим работам относятся

— исследования с помощью космических радиотелескопов, выводимых на околосолнечные и околоземные орбиты, работающих совместно в режиме радиоинтерферометрии,

— исследования окружающего мира с помощью орбитальных астрофизических инструментов современного уровня (типа космического телескопа «Хаббл») в различных спектральных диапазонах,

— исследования с помощью оптических телескопов с разнесенной базой, которые можно располагать, например, на Луне,

— исследование проблемы полета к звездам.

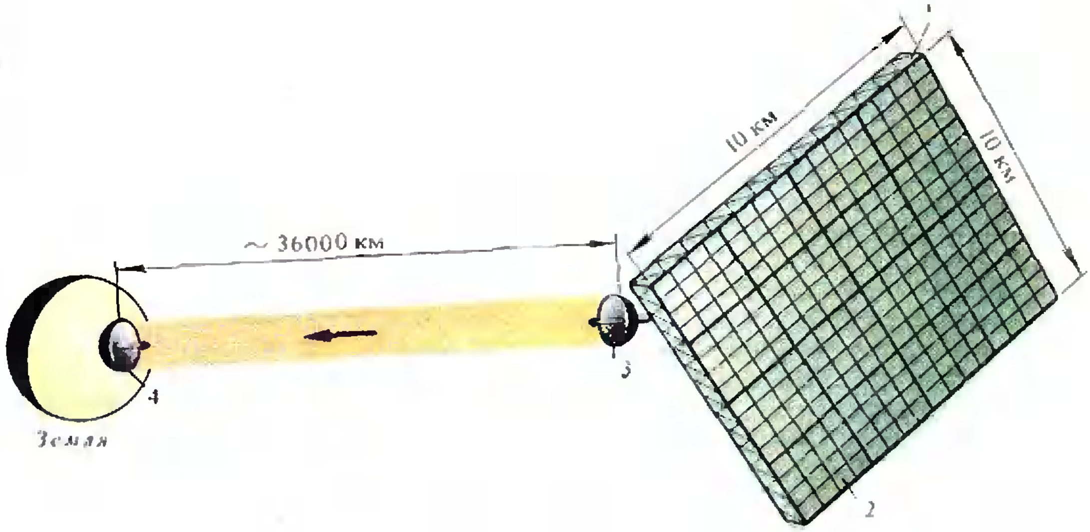
Все это дорогие предприятия, но если объединить усилия многих стран и разумно распределить работы, то их можно осилить. Во всяком случае, расходы на их осуществление будут существенно меньше, чем военные расходы государств.

Технические средства

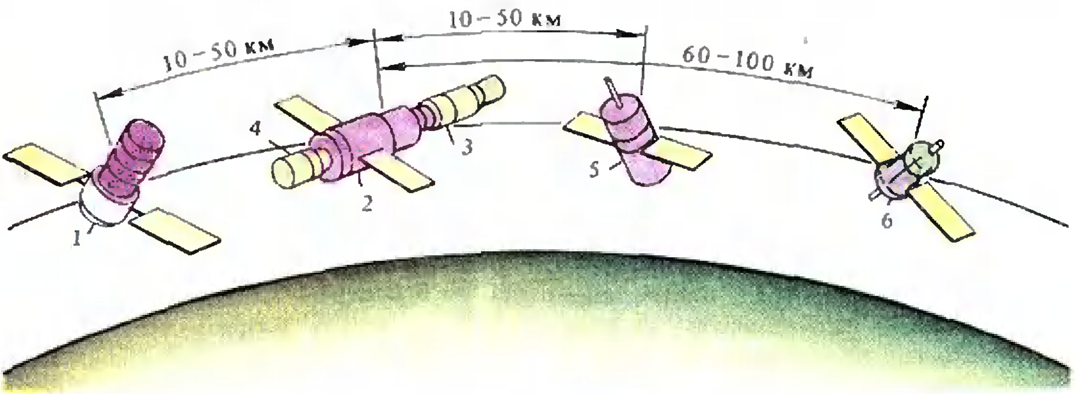
Для реализации такой программы работ необходимо совершенствовать имеющуюся космическую технику, создавать совершенно новую, проводя теоретические и экспериментальные исследования.

Можно уже сегодня представить, какие технические средства для этого понадобятся.

1. Низкоорбитальные системы унифицированных спутников экологического контроля, исследования природных ресурсов, метеорологических наблюдений и наземные автоматизированные центры обработки информации с автоматизированной системой доставки результатов абонентам.



Солнечная орбитальная электростанция на геостационарной орбите (мощность ~10^9 Вт, масса ~10^8 кг). 1 — ферменная конструкция, отслеживающая направление на Солнце; 2 — пленочные солнечные батареи; 3 — передающая антенна размером ~1 км, неподвижная относительно Земли; 4 — приемная антенна размером ~10 км, работающая в радиодиапазоне на длине волны ~10 см.



Станция-«облако» (высота орбиты 450—500 км). 1 — астрофизическая обсерватория, ориентируемая на объекты наблюдения; 2 — базовый жилой блок; 3 — транспортный корабль; 4 — межорбитальный аппарат для обслуживания модулей станции; 5 — производственный модуль; 6 — заправочная станция.

Здесь уже создан большой задел, особенно у американцев. Следует расширять эти работы на коммерческой основе. Наша страна тоже могла бы активно участвовать в создании таких систем.

2. Система платформ на геостационарной орбите для глобальной связи, телевидения, экологического контроля, исследования природных ресурсов и метеорологических наблюдений.

Спутники на геостационарной орбите неподвижны относительно поверхности Земли. На этой орбите нельзя располагать слишком большое количество спутников, иначе они начнут мешать работе друг друга. Поэтому придется в будущем создавать многофункциональные платформы.

3. Системы навигационных спутников, используемых для определения местоположения судов, самолетов, автомобилей и даже туристов.

4. Системы спутников для вызова срочной помощи терпящим бедствие.

Первая такая система — международная система «КОСПАС — САР-

САТ» уже начала работать. Но нужно расширять их возможности с тем, чтобы при обращении о помощи передавался не только сигнал «SOS» и координаты, но и хотя бы некоторый минимальный стандартный объем информации об объекте, терпящем бедствие.

5. Орбитальные станции.

По-видимому целесообразно создавать орбитальные станции разных типов: станции-лаборатории типа «Салют» и «Мир», типа разрабатываемой в настоящее время американской станции «Фридом», орбитальные станции типа «облако».

Последний тип станции мне представляется наиболее перспективным. Идея станции-облака заключается в том, что отдельные части станции — ее модули — не соединены жестко между собой, а «плавают» поблизости друг от друга на расстояниях, скажем, 10—100 километров (средства современной космической техники позволяют обеспечить стабильность такого «облака» без существенного расхода топлива). При этом каждый модуль станции работает в оптимальных для него условиях: на технологическом модуле нет помех (микроперегрузок) от космонавтов (например, когда они занимаются физическими упражнениями) и от работы двигателей ориентации; модули-телескопы ориентируются без помех с нужной точностью и в нужном направлении; заправочная станция с опасными запасами компонентов топлива может быть удалена на достаточное расстояние от базового жилого модуля.

6. Орбитальные заводы для производства сверхчистых материалов, биологических препаратов и для других производственных процессов, которые будут рентабельны или целесообразны на орбите.

7. Автоматические космические аппараты международной спутниковой системы наблюдения и контроля поверхности суши, вод, воздушного пространства и подводной обстановки с системой выдачи информации абонентам.

В международной системе наблюдения можно было бы иметь три подсистемы:

— 12—16 спутников с оптико-телевизионной аппаратурой для наблюдений в дневное время,

— 12—16 спутников с радиолокаторами для всепогодного и круглосуточного наблюдения,

— 3—6 спутников с аппаратурой для наблюдений в инфракрасном диапазоне.

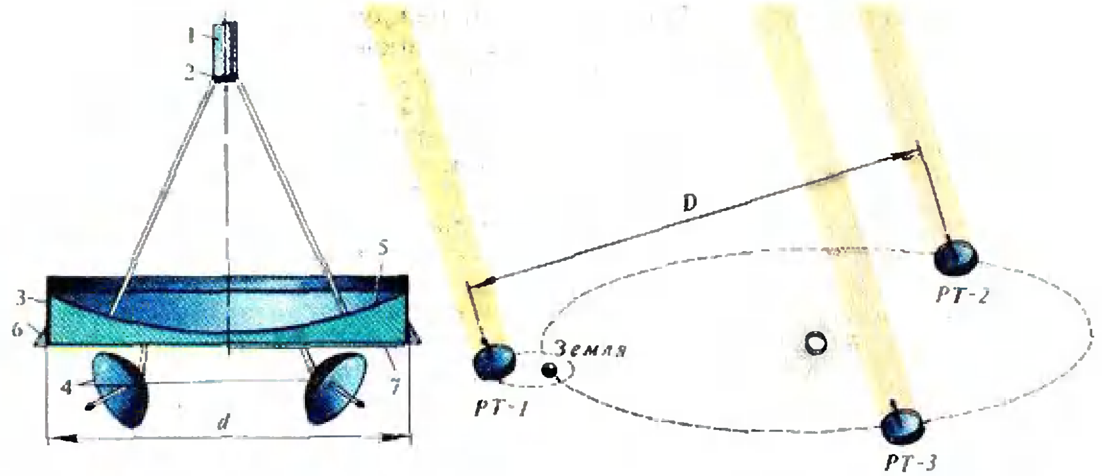
Современные оптико-телевизионные космические средства уже позволяют рассмотреть с орбиты предметы с размерами порядка метра и передать изображение через спутники-ретрансляторы абонентам.

Так называемые радиолокаторы бокового обзора, вынесенные на орбиту, при достаточной мощности позволят вести круглосуточный и всепогодный контроль поверхности Земли, воздуха и даже наблюдать за передвижениями подводных лодок. В принципе с помощью орбитальных радиолокаторов можно было бы различать предметы размером несколько метров.

С помощью такой системы спутников можно было бы получить темп обновления информации о происходящем на поверхности Земли порядка 30—60 минут.

8. Системы радиотелескопов, выводимых на околоземные и околосолнечные орбиты и работающих в единой радиоинтерферометрической схеме.

Разрешающая способность оптического телескопа (угловой размер предельно различимого объекта) определяется отношением длины волны, на которой ведется наблюдение, к диаметру телескопа. Для телескопа с диаметром около 3 метров, вынесенного за пределы атмосферы, в принципе можно получить разрешающую способность порядка сотых долей угловой секунды. Для системы радиотелескопов, вынесенных на орбиту и работающих совместно, разрешающая способность будет определяться отношением длины волны, на которой ведется прием радиоизлучения, к расстоянию между радиотелескопами. По-



Радиотелескоп и размещение совместно работающих радиотелескопов на орбите Земли (база $D \approx 250$ млн. км). 1 — приборный отсек; 2 — приемник; 3 — теплоизолирующая конструкция, обеспечивающая стабильность температур; 4 — антенны радиосвязи с Землей; 5 — зеркало; 6 — электрореактивные двигатели для ориентации; 7 — солнечные батареи; d — диаметр телескопа.

этому с помощью радиотелескопов, вынесенных на околосолнечную орбиту, можно получить разрешающую способность порядка десятимиллионных долей угловой секунды и заглянуть на самые окраины нашей Вселенной.

Кроме того, большие радиотелескопы с размерами порядка километра позволят человечеству начать регулярный поиск сигналов внеземных цивилизаций.

9. Орбитальные астрофизические обсерватории, работающие в различных спектральных диапазонах.

10. Оптические телескопы с разнесенными зеркалами, располагаемые на Луне.

Идея таких телескопов та же, что и в радиоинтерферометрии,— в увеличении базы наблюдения. Но базу нужно удерживать и знать с точностью до малых долей длины волны электромагнитного излучения, на которой ведется наблюдение, т. е. в данном случае с точностью до долей микрона. Поэтому и появляется мысль о расположении их на Луне.

11. Исследовательская база на Луне, которая может потребоваться для создания астрофизических обсерваторий на поверхности Луны и для изучения возможностей использования лунных ископаемых в космической деятельности человечества.

12. Автоматические аппараты для доставки на Землю проб грунта и атмосферы Марса.

13. Если в результате этих работ окажется необходимым осуществление экспедиции на Марс, то придется разрабатывать и создавать соответствующие средства пилотируемой экспедиции на Марс: марсианский орбитальный корабль, марсианский экспедиционный корабль, марсианский автомобиль и соответствующее оснащение для жизни и исследований на Марсе.

14. Автоматические средства исследования Венеры: орбитальная база у Венеры, атмосферные шары-зонды, средства радиолокационного картирования поверхности, посадочные лаборатории.

15. Солнечные обсерватории с перигелием внутри орбиты Меркурия, предназначенные для регулярного исследования ближайшей к нам звезды — нашего Солнца.

16. Автоматические аппараты для исследований астероидов.

17. Автоматические космические аппараты для исследования дальних планет.

(Окончание см. на с. 53)

Мех дыбом

В июльском номере «Кванта» за 1990 год мы предложили читателям задачу «Сушка меха». Повторим ее условие:

В пушной промышленности возникает проблема сушки меха после мытья. Волоски меха слипаются, образуя неприглядные «сосульки». Это портит внешний вид меха. Нужно найти способ, позволяющий разделить волоски меха в процессе сушки.

Судя по откликам читателей, эта проблема заинтересовала их не менее, чем экзотическая задача спасения древнегреческой статуи (см. «Квант» № 7, 1990). Однако, как и прежде, многие пошли традиционным путем: если необходимо произвести какое-то действие, то надо сконструировать специальное устройство. Поэтому в редакцию поступило немало писем, в которых предлагаются разного рода хитрые гребни. Они, по мнению авторов, будут разделять слипшиеся волоски меха, позволяя тем самым теплому воздуху проходить внутрь меха.

Надо сказать, что присланные решения в большинстве своем явно неизобретательские, неидеальные. Понятие идеального решения или идеального конечного результата (сокращенно ИКР) является одним из основных понятий теории решения изобретательских задач (сокращенно ТРИЗ). Ее создал наш выдающийся соотечественник Г. С. Альтшуллер. В настоящее время ТРИЗ успешно применяют во всем мире.

Итак, вернемся к задаче. Представим себе идеальный результат: ворсинки меха сами собой перестают слипаться, теплый воздух свободно проходит внутрь меха. Сушка осуществляется быстро, внешний вид меха не ухудшается. Правильная формулировка идеального решения зачастую делает ответ очевидным. Главное — не испугаться кажущейся невозможности осуществления решения. В математических задачах читатели, вероятно, привыкли обозначать искомую величину x. Аналогично и нам требуется найти искомый x-элемент, который позволит осуществить требуемое действие.

Ребята, предложившие расчесывать мех во время сушки, считали, что x-элемент — это зубья гребня. Слишком прозаично! За некоторое ускорение процесса сушки в этом случае приходится платить конструированием целого расчесывающего станка. Гораздо более красивое решение прислал Олег Гребенников из Уфы. Он пишет: «Ворсинки меха слипаются из-за поверхностного натяжения воды. Надо сделать мех несмачиваемым, тогда необходимость в сушке отпадет, воду можно будет просто стряхнуть». Возможно, *над этим* решением и следует подумать химикам, мы же, не углубляясь в его разбор, поищем x-элемент из области физики.

Сформулируем проблему следующим образом: какое физическое поле может «растолкать» ворсинки меха в разные стороны? Ответ очевиден: электростатическое. Наверное, все читатели видели школьный опыт: при зарядке электрического султанчика его лепестки расходятся в стороны. Однако далеко не все сумели использовать знание физики для решения технической проблемы. Уж слишком велика сила психологической инерции.

Но вот участники кружка «Юные изобретатели» Сепычевской школы Верещагинского района Пермской области (руководитель кружка А. И. Колобов) нашли чисто физический x-элемент. Их решение задачи приведем полностью.

«Для сохранения высокого качества меха необходимо, чтобы в процессе сушки ворсинки меха сами собой выпрямлялись или вытягивались по команде «смирно!». Этого можно добиться следующими способами.

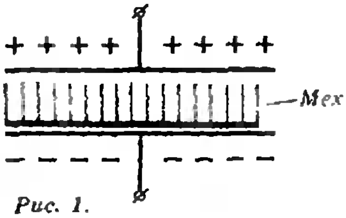


Рис. 1.

1. Поместить мех в электрическое поле, как показано на рисунке 1. Силовые линии электрического поля при этом будут выпрямлять ворсинки меха.

2. Перед мойкой размешать в моющем растворе мельчайшие частицы из ферромагнитного материала. Во время мойки меха ферромагнитные частицы вместе с моющим раствором прильнут к ворсинкам меха. Сушку меха производить в магнитном или электромагнитном поле, как показано на рисунке 2. Магнитные силовые линии будут выпрямлять ворсинки меха. В процессе сушки ферромагнитные частицы сами собой отделятся от ворсинок и притянутся магнитным полем к магнитному элементу. (Для ускорения отделения ферромагнитных частиц от магнитного элемента можно применить электромагнит или соленоид: выключил электрический ток, проходящий через катушку,— и ферромагнитные частицы отпали от сердечника. Их можно снова помещать в моющий раствор.)»

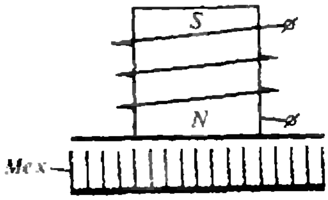


Рис. 2.

Мы думаем, что теперь читатель без труда справится со следующей задачей:

Задача 3. «Опыление ветром» Для повышения урожайности многих культур часто применяют искусственное опыление. Оно заключается в обдувании растений потоком воздуха. Однако вот беда: поток воздуха вызывает закрытие венчиков цветков, что резко ухудшает опыление. Подумайте, как можно предотвратить закрывание венчиков цветов при опылении ветром.

Следующие две задачи не похожи по форме, однако их решение во многом сходно.

Задача 4. «Горизонтальный желоб»

Во время строительства возникла проблема определения горизонтальности желоба в бетонном теле плотины. Обычно такая задача решается с помощью ватерпаса — прибора, основной частью которого является трубочка с водой, содержащей пузырек воздуха. Если трубочка горизонтальна, то пузырек находится посередине, если не горизонтальна, то пузырек отходит к одному из концов. Но в данном случае непосредственное использование прибора затруднено. Ватерпас в желоб поместить можно, но желоб имеет изгиб, а потому прибора не видно и не удается определить горизонтальность желоба за изгибом. Помогите строителям. А те, кто решат эту задачу, пусть подумают над вопросом: предположим, желоб негоризонтален; как определить его наклон?

И еще одна строительная задача. Сформулируем ее в виде ситуации.

Задача 5. «Скала над дорогой»

Главный инженер стремился скрыть свое раздражение. Его люди в лютые сибирские морозы строят дорогу, а разлюбезные проектировщики так все распланировали, что над дорогой будет нависать кусок скалы, угрожая безопасности строительства и будущего движения по дороге. Использовать взрывчатое вещество нельзя — вблизи поселок.

«Как вы поняли,— обратился главный инженер к собравшимся, — вопрос номер один сейчас — это как отковырнуть эту проклятую глыбу.»

Поднялся молодой инженер, недавно вернувшийся из загранкомандировки: «В аналогичных случаях в Италии,— начал он,— бурят в скале скважины, потом специальная машина вставляет в них клинья, нажимает — и порода с треском отваливается...»

«Нет, не пойдет,— прервал его главный инженер,— бурить скважины мы можем, а вот этой итальянской машины у нас нет.»

«Да, тут не Италия,— почему-то развеселился мастер.— Если что и трещит, так это мороз за окном.»

Что бы вы предложили главному инженеру?

Ждем ваших писем.

Ведущий рубрики
А. Лазарян

Ближайшие задачи в космосе

(Начало см. на с. 46)

18. Многоразовые дешевые транспортные корабли для транспортных операций Земля — орбита — Земля.

Что значит дешевые? Доставка грузов на орбиту одноразовыми носителями в конце семидесятых — начале восьмидесятых годов обходилась американцам в 1500—2500 долларов за каждый килограмм. У нас эти работы обходились существенно дешевле, но объективно сравнивать здесь очень трудно. Переход на «Шаттл» с точки зрения элементарного здравого смысла был, конечно, шагом назад: доставка аппаратов на «Шаттле» обходится сейчас не дешевле, чем 10 000 долларов за килограмм. Советский «Буран», внешне довольно похожий на «Шаттл», по экономическим показателям будет еще хуже. Ни «Шаттл», ни «Буран» не решают задачи снижения транспортных расходов в космосе. Так что задача создания действительно дешевых средств доставки космических аппаратов на орбиту остается. По моему мнению, эти новые средства должны снизить стоимость доставки на орбиту до сотни долларов.

19. Дешевые многоразовые транспортные средства для транспортных операций низкая орбита — геостационарная орбита — низкая орбита.

20. Космические роботы.

Следует ожидать расширения работ в открытом пространстве на орбитах спутников Земли. Эти работы будут связаны с созданием орбитальных заводов, больших радиотелескопов, обслуживанием орбитальных аппаратов, возможно, со строительством орбитальных электростанций. Скованность человека, одетого в космические доспехи, опасность работ в открытом пространстве вынудят нас создать космические роботы.

* * *

Эта статья не претендует на исчерпывающее освещение задач космических работ на ближайшие десятилетия. Она только показывает на необходимость и возможность их формирования уже сейчас, с тем чтобы не упустить время и не делать ошибок в выборе цели.

Я — ЭТО ДРУГОЕ ДЕЛО

(фантастический рассказ)

Ф. ПОЛ (США)

Я сижу на краю металлической кровати. Матрацем служит второе одеяло, постеленное на ее стальные пружины. Не слишком удобно, но меня ждут еще бо́льшие неприятности.

Близится час, когда меня переведут в окружную тюрьму, а через некоторое время после этого я окажусь в камере смертников. Разумеется, сначала состоится судебная процедура, но это простая формальность. Меня не только схватили на месте преступления, я к тому же еще во всем признался.

Я умышленно убил Лоренса Коннота, моего друга, который спас мне жизнь. Конечно, в свое оправдание я мог бы привести некоторые смягчающие обстоятельства, но вряд ли суд примет их во внимание.

Коннот и я были друзьями много лет. Война разъединила нас. Через несколько лет после ее окончания мы снова встретились в Вашингтоне, но в наших отношениях появилась некоторая отчужденность. За это время он, как это говорится, нашел свое призвание. Он много и упорно над чем-то работал, но скрывал от меня, что это было такое. У меня, естественно, были свои заботы, но после того, как я с треском провалился по анатомии, они уже не имели никакого отношения к науке. Должен сказать, что к медицине я охладел уже давненько, с того самого дня, когда впервые попал в анатомический театр; трупов я не боялся, просто не было в этом ничего привлекательного.

Так я и не получил никакого академического звания, да и к чему оно сенатскому охраннику?

Карьера не очень внушительная? Конечно, нет. Но я не стыжусь ее. В жизни вообще ничего не следует стыдиться. А моя должность мне даже нравится. Сенаторы в присутствии нас, охранников, обычно довольно откровенны, к нам относятся неплохо, и мы частенько узнаем интересные вещи о том, что происходит за правительственными кулисами. Со своей стороны, мы можем быть полезны немалому числу людей — газетным репортерам, охотящимся за какой-нибудь историей; правительственным чиновникам, могущим порой использовать одно-единственное неосторожное замечание для целой политической кампании; а также всем тем, кто захотел бы побывать во время важных прений на галерее для посетителей.

Как это и получилось, к примеру, с Ларри Коннотом. Мы с ним столкнулись как-то на улице, немного поболтали, потом он спросил, не могу ли я достать для него пропуск на предстоящие прения по внешней политике. На следующий день я сообщил ему по телефону, что с пропуском все в порядке.

Он явился к началу выступления государственного секретаря, и его маленькие влажные глазки прямо-таки блестели от удовольствия. И тут неожиданно раздался громкий крик... История эта, конечно, у всех еще свежа в памяти. Их было трое, этих фанатиков из Центральной Америки, пытавшихся с помощью огнестрельного оружия оказать воздействие на нашу политику. У двоих были пистолеты, у третьего — ручная граната. Пистолетными выстрелами ранило двоих сенаторов и одного охранника. Мы с Коннотом стояли совсем рядом. Я бросился на маленького паренька, уже замахнувшегося гранатой, сбил его с ног; граната откатилась в сторону, я хотел схватить ее и, увидев, что она взведена и вот-вот взорвется, на какое-то мгновение оцепенел, и в это же самое мгновение на ней оказался Ларри...

Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики в 15-ти томах. Том 10» (М., Молодая гвардия, 1967). Перевод с английского Л. Мишина.

Газеты сделали нас обоих героями. Они писали, как о чуде, что Ларри, упав плашмя на гранату, еще успел ее из-под себя вытащить и отбросить в такое место, где она, взорвавшись, никому не причинила вреда.

Верно, вреда она действительно не причинила никому. В газетах упоминалось, что взрыв гранаты заставил Ларри потерять сознание. И верно, он действительно потерял сознание. Прошло около шести часов, пока он снова не пришел в себя, и еще целый день после того он находился в каком-то полузабытьи.

На следующий день вечером я его навестил. Он был очень рад моему приходу.

— Ну вот мы с тобой и в героях,— сказал он приветливо.

— Ларри, ты спас мне жизнь,— сказал я.

— Чепуха, Дик, не стоит говорить об этом. Я бросился вперед чисто инстинктивно, нам обоим повезло, и все тут.

— Газеты пишут: ты был просто великолепен, проделал все так молниеносно, что никто и не понял толком, как все это произошло.

— В такую ничтожную долю секунды,— произнес он еще более небрежным тоном,— никто и не смог бы, естественно, успеть заметить что-либо.

— Я успел, Ларри.

Его маленькие глазки еще более сузились.

— Я был как раз между тобой и гранатой. Ты не мог броситься вперед ни мимо меня, ни надо мной, ни сквозь меня. И все же оказался лежащим на гранате.

Он продолжал молчать.

— И еще одно, Ларри. Она взорвалась прямо под тобой, тебя буквально приподняло взрывом. На тебе был непроницаемый для осколков жилет?..

— Видишь ли,— слегка откашлявшись, сказал он,— тот факт, что...

— Оставим «тот факт» в покое, дружище. Что произошло на самом деле?

Он снял очки и растерянно стал тереть себе глаза.

— Не понимаю,— пробормотал он.— Газеты пишут, что она разорвалась в нескольких...

— Плюнь на газеты, Ларри,— мягко прервал я его.— Пойми, я стоял рядом, и глаза у меня были открыты.

Ростом Ларри Коннот был вообще невелик, но никогда он не казался мне таким крошечным, как сейчас, когда он, сжавшись в маленький комочек в своем кресле, смотрел на меня такими глазами, как будто я был воплощением Немезиды.

Затем он рассмеялся, рассмеялся таким смехом — почти счастливым смехом, что я вздрогнул от неожиданности.

— Ну ладно, Дик. К черту эту игру в прятки: я ведь потерял сознание, а у тебя глаза были открыты... Рано или поздно я все равно должен был бы кому-нибудь признаться. Почему не тебе в конце концов?

Из того, что я узнал, в этой моей прощальной записке я опущу всего лишь одну подробность, подробность, правда, весьма существенную. О ней не узнает никто и никогда. Не узнает от меня, во всяком случае.

— Естественно, я не мог не понимать,— сказал Ларри,— что рано или поздно ты вспомнил бы наши ночные разговоры в кафе, наши бесконечные споры о боге и мировых проблемах. Конечно, ты их не забыл.

Да, я не забыл. У меня еще сохранилось в памяти, как я беспощадно издевался над его бредовыми утверждениями и гипотезами и как он упрямо защищал их. Одна из них была особенно вздорной. Он начал как-то доказывать, что...

В голове у меня все вдруг перемешалось.

— Ты, кажется, тогда утверждал,— заговорил я, с трудом подыскивая слова,— что когда-нибудь придет время и человеческий дух овладеет... гм... психокинетическими силами... Что когда-нибудь мы, не прибегая ни к каким машинам и не пошевелив даже пальцем, сможем одною лишь силой нашей мысли переносить наше тело в мгновение ока в любое место, какое нам вздумается. В общем, что для человеческого духа нет ничего невозможного.

— Боже, каким я тогда был желторотым юнцом! — воскликнул Ларри и задумался.

Я не мешал ему думать. Мне самому нужно было собраться с мыслями.

— Разумеется,— снова заговорил он,— человеческий дух сам по себе не способен на такие вещи. Все, что я тебе тогда об этом говорил, все это были слова восторженного мечтателя, а не выводы ученого, проверившего их истинность сотней опытов. Но кое в чем я все же был прав, и это кое-что помогло мне найти верное решение. Существуют некоторые... скажем, технические приемы, с их помощью человек может направить работу своей мысли таким образом, что она подчинит себе обычные физические силы, с которыми мы на каждом шагу сталкиваемся в нашей повседневной жизни. Владея такими приемами, человек окончательно восторжествует над природой!

Какой-то необыкновенный оттенок в его голосе и в выражении его глаз заставил меня почувствовать, что он действительно вырвал у природы какую-то великую тайну. На этот раз я поверил бы ему, даже если не было бы вчерашнего инцидента в сенате.

— Владея этими приемами,— продолжал он,— человек в состоянии делать все. Ты понимаешь, Дик? Решительно все! Перелететь через океан? В одну секунду. Обезвредить взрывающуюся бомбу? Ты видел это собственными глазами. Конечно, действия эти представляют собой работу, и она, как всякая работа, требует расхода энергии: никому не дано обойти законы природы. Поэтому-то я и вышел на целый день из строя. Полная нейтрализация большого количества мгновенно высвобожденной энергии — пока еще дело довольно трудное. Гораздо легче, например, отклонить в сторону летящую пулю, а еще проще — удалить из ствольной коробки патрон и перенести его себе в карман, чтобы выстрел вообще не состоялся. Расстояния не играют почти никакой роли. Стоит тебе захотеть, Дик,— в его глазах вспыхнул горделивый огонек,— и ты увидишь перед собой английскую корону во всем блеске ее драгоценностей...

А в будущее заглядывать ты уже можешь? — спросил я.

Он нахмурился.

— Зачем такой тон, Дик, ведь я говорю о серьезных вещах. Шарлатанством я никогда...

— А читать мысли?

Лицо его прояснилось.

— Ах, ты и этот разговор помнишь? Нет, этого я не могу. Позже когда-нибудь, если займусь этой проблемой по-настоящему. Во всяком случае, не сейчас.

— Покажи мне что-нибудь, что ты можешь уже сейчас,— попросил я.

Он улыбнулся. Видимо, он наслаждался нашим разговором, и я его хорошо понимал. Долгие годы он скрывал свою тайну от всех. Десять лет поисков и экспериментов в полном одиночестве! Десять лет тайных надежд и разочарований, начиная с появления еще бесформенной идеи и кончая днем, когда она стала реальной действительностью. Ему просто необходимо было дать выход распиравшим его чувствам. Думаю, он в самом деле был рад, что наконец-то его кто-то разоблачил.

— Показать что-нибудь? Сейчас сообразим.— Он окинул комнату взглядом и кивнул головой: — Смотри на окно.

Окно открылось и снова закрылось.

— Радиоприемник,— сказал Ларри.

Маленький аппарат вдруг ожил: щелкнув, опустилась одна из клавиш, засветилась шкала, раздалась музыка.

— Смотри внимательно!

Музыка резко умолкла, приемник исчез. И тут же вновь появился на прежнем месте; выскочивший из розетки конец соединительного шнура с легким стуком упал на ковер.

— Он был примерно на высоте Эвереста,— сказал Ларри, явно стараясь сохранить непринужденный вид.— А что скажешь о такой штуке...

Лежавший на полу шнур поднялся, и его вилка устремилась к розетке, замерла в воздухе на секунду и снова шлепнулась на пол.

— Нет,— передумал Ларри,— сейчас я тебе покажу действительно кое-что серьезное. Следи за приемником, Дик. Я его заставлю работать без тока. Для усиления электромагнитных колебаний достаточно...

Его напряженный взгляд снова был прикован к аппарату. Мгновение, другое. Вспыхнула лампочка, освещающая шкалу; из динамика донеслись первые шипящие звуки. Я поднялся со стула, оказавшись как раз позади Ларри.

Я воспользовался телефоном, стоявшим на столике рядом с моим стулом. Удар пришелся ему в затылок, возле уха; он обмяк и повалился на пол. Я ударил его еще дважды, чтобы он наверняка не смог прийти в себя в течение ближайшего часа, и бросил телефонную трубку на место.

Затем приступил к обыску. То, что меня интересовало, я нашел в его письменном столе: записки и расчеты. Все, что я должен был знать, чтобы быть в состоянии делать то, что мог делать он. Это вместилось в две-три строки, все прочее я сжег.

Я снова поднял трубку и вызвал полицию. Услыхав их сирену, я вытащил мой служебный пистолет и выстрелил ему в горло. Он был уже мертв, когда они ворвались в комнату.

Совесть моя чиста. На суде я постараюсь объяснить мотивы моего поступка, хотя и не уверен, что присяжные признают их основательными.

В тех двух-трех строчках было сказано, как делать то, что мог делать он, Лоренс Коннот. Всякий, кто умеет читать, тоже мог бы это делать. Формула Коннота доступна всем грамотным людям — честным, нечестным, подлецам, преступникам, душевнобольным.

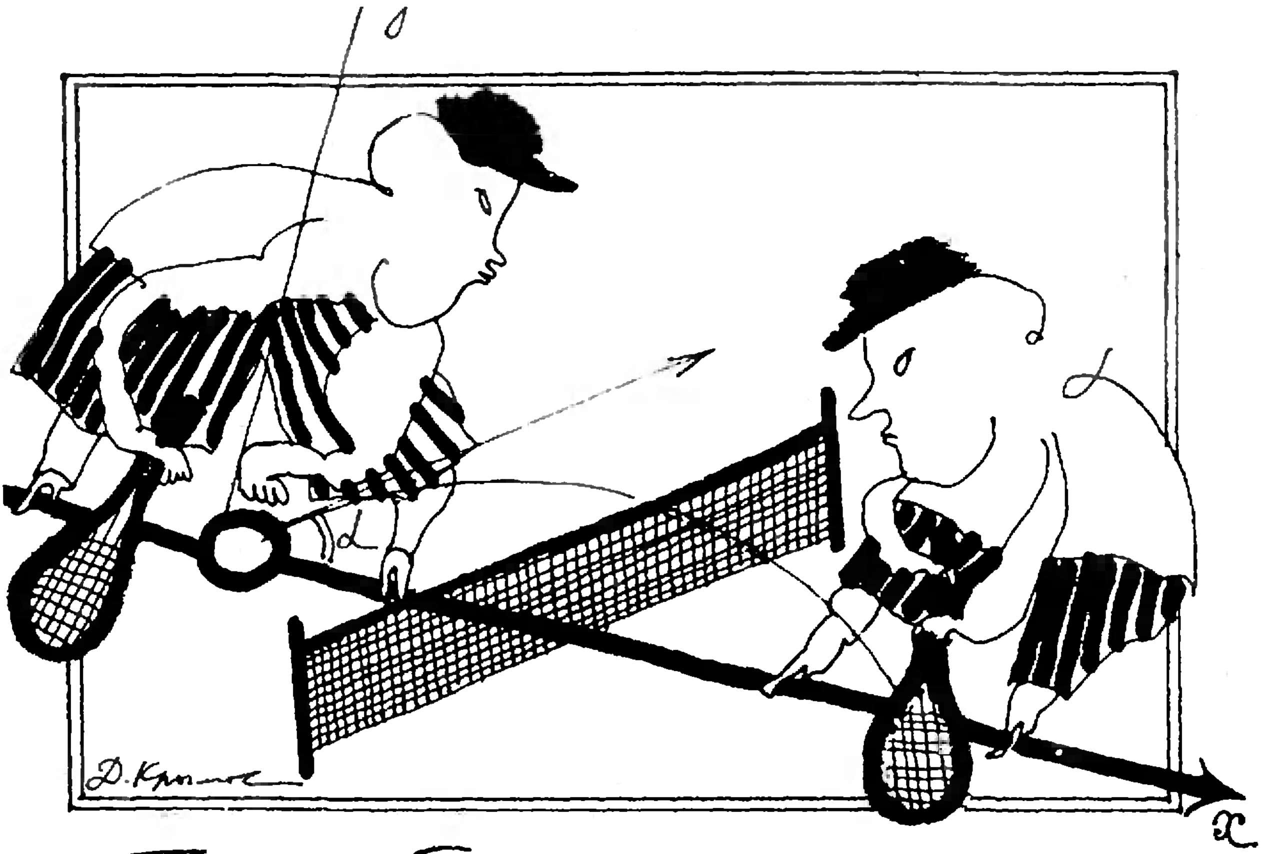
Лоренс Коннот был честным идеалистом, это верно. Мы были друзьями с детства, я его душу знал насквозь и, как говорится, в случае необходимости мог бы доверить ему мою жизнь. Все это так. Но ведь речь идет о гораздо большем!

Не только о его жизни! Не только о моей!

Кто может поручиться за человека, который вдруг почувствует себя богом? Предположите, что какой-нибудь человек стал единственным обладателем секрета, дающего ему возможность проникать сквозь любые стены, в любое закрытое помещение, в любой банковский сейф. Предположите, что этому человеку не страшно никакое оружие.

Говорят, что власть разлагает. Что абсолютная власть разлагает абсолютно. Можно ли себе представить более абсолютную власть, чем та, которой обладал Коннот? Человек, который, не боясь наказания, мог делать все, что ему взбредет иа ум? Ларри был моим другом, но я убил его совершенно хладнокровно, понимая, что человека, владеющего тайной, которая может сделать его властелином мира, нельзя оставлять в живых.

Я — это другое дело.



Практикум абитуриента

Векторные уравнения в кинематике

Д. АЛЕКСАНДРОВ

Как известно, при равноускоренном движении зависимости скорости $\vec{v}$ и перемещения $\vec{s}$ тела от времени задаются формулами

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t, \qquad (1)$$

$$\vec{s}=\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2}, \qquad (2)$$

где начальная скорость $\vec{v}_0$ и ускорение тела $\vec{a}$ — не зависящие от времени векторы.

Упражнение 1. Из формул (1) и (2) получите следующие выражения:

$$\vec{s}=\frac{\vec{v}_0+\vec{v}}{2}t,$$

$$v^2-v_0^2=2\vec{a}\cdot\vec{s} \qquad (3)$$

(где $\vec{a}\cdot\vec{s}$ — скалярное произведение).

Упражнение 2. Убедитесь, что из формулы (2) после дифференцирования по времени получается выражение (1).

Среди всевозможных случаев равноускоренного движения особое место занимает свободное падение тел в поле тяжести. Решение большинства задач на эту тему сводится, как правило, к применению формул (1), (2) и (3). На этом примере мы и рассмотрим основные методы работы с векторными уравнениями.

Задача 1. *Тело, брошенное с поверхности земли под углом α к горизонту, упало на расстоянии L от места броска. Определите время полета тела.*

Решение 1. Выберем оси координат X и Y так, как показано на рисунке 1, и запишем векторное

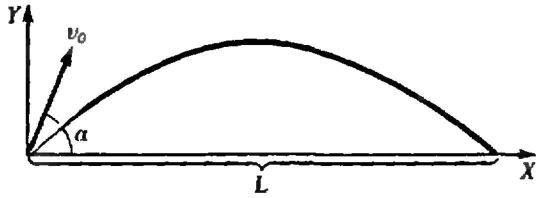


Рис. 1.

уравнение (2) в проекциях на эти оси:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$
$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (4)$$

Пусть τ — искомое время полета. Из условия задачи следует, что при $t=\tau$ тело имеет координаты $x=L$ и $y=0$. Уравнения (4), записанные для момента падения тела, дают систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot \tau,$$
$$0 = v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2}. \qquad (5)$$

Отсюда, исключив v_0, находим

$$\tau = \sqrt{\frac{2L\operatorname{tg}\alpha}{g}}.$$

Мы решили задачу стандартным методом, который можно назвать «проектированием на оси». С его помощью векторное уравнение сводится к системе скалярных, которая затем решается обычным образом. Именно так абитуриенты обычно и решают подобные задачи, однако при ответе даже несложные вопросы зачастую ставят их в тупик. Например, такие:

1) Какая разница между системами уравнений (4) и (5)?

2) Почему из трех уравнений (1) — (3), описывающих равноускоренное движение, для проектирования выбрано второе?

3) Почему именно так направлены оси координат?

Упражнение 3. Прежде чем читать ответы, подумайте, как бы вы ответили на эти вопросы.

Вы, конечно же, решали задачи с числовыми данными и знаете, что обычно требуется сначала получить буквенный ответ, или, как принято говорить, ответ в общем виде, а потом подставить в него числа. Понятно, что в буквенном ответе содержится несоизмеримо больше информации, чем в числовом. Так вот, система (4) находится примерно в таком же отношении к системе (5), как и буквенный ответ к числовому. Так, если первая система верна всегда, т. е. из нее можно найти координаты тела в любой момент времени, то вторая верна только для момента падения тела.

По поводу второго вопроса заметим, что три изменяющиеся со временем величины $\vec{v}$, $\vec{s}$ и t в уравнения (1) — (3) входят парами. В нашей задаче известна дальность ($\vec{s}$), а найти нужно время (t), поэтому мы и выбрали уравнение с парой $\vec{s}$, t, т. е. второе.

Упражнение 4. Как нужно переделать условие задачи, чтобы она решалась с помощью уравнений (1) или (3)?

Заметим, что эти соображения легко переносятся на задачи из любого раздела физики. Ведь все встречающиеся в задаче величины можно разбить на три группы: известные

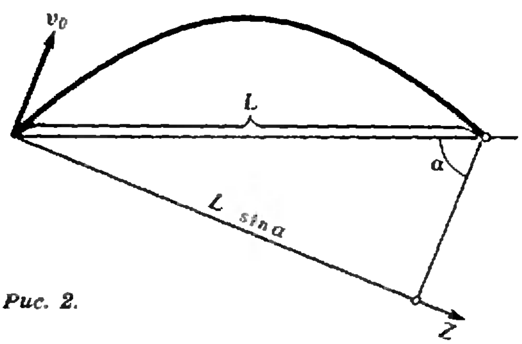


Рис. 2.

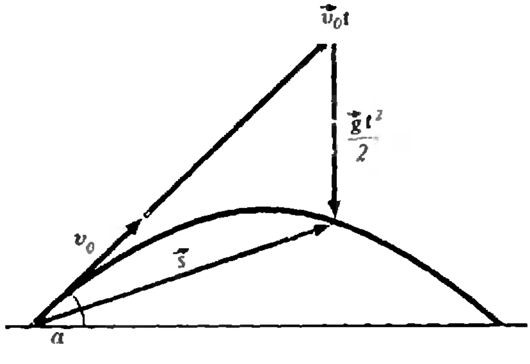


Рис. 3.

величины; неизвестные величины, которые необходимо найти; неизвестные величины, которые не требуется находить. Ясно, что если в формулы не входят первые два типа, то задачу не решить, а вот от третьих желательно по возможности избавиться.

Что касается третьего вопроса, то вы, наверное, посчитаете его глупым и скажете, что, конечно же, именно эти оси координат самые удобные. Вообще в такой задаче мысль направить оси куда-нибудь еще выглядит крамольной. И это легко обосновать. Действительно, естественно считать метод удобнее, если он позволяет получить ответ при меньшем количестве вычислений. В этом смысле наибольшие неприятности в уравнении (2) сулит член $\vec{g}t^2/2$ — из-за него уравнения получаются квадратными. Если мы не хотим решать два квадратных уравнения, одну ось нужно направить горизонтально. Вторую же можно направить куда угодно, но, чтобы не вводить при проектировании новых углов, направим ее вертикально. Кроме того, дальность полета и высота, обычно фигурирующие в подобных задачах, являются координатами именно при таком выборе осей. Убедительно, не правда ли? И все-таки...

Решение 2. Направим ось Z перпендикулярно начальной скорости $\vec{v}_0$ (рис. 2). В проекциях на эту ось вместо уравнения (2) получим

$$z=\frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2}.$$

При $t=\tau$ $z=L\sin\alpha$. Отсюда получаем ответ:

$$\tau=\sqrt{\frac{2L\operatorname{tg}\alpha}{g}}.$$

Это решение стало возможным потому, что величина третьего типа (по нашей классификации) $\vec{v}_0$ — векторная, и от нее можно избавиться удачным выбором оси координат, получив тем самым одно уравнение с одним неизвестным.

Впрочем, можно вообще обойтись без всяких осей...

Решение 3. Формула (2) утверждает, что при равноускоренном движении вектор перемещения тела в любой момент времени равен сумме векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g}t^2/2$ (рис. 3). Это, кстати, означает, что движение тела, брошенного под углом к горизонту, складывается из равномерного и прямолинейного движения со скоростью $\vec{v}_0$ и свободного падения без начальной скорости.

«Нарисуем» формулу (2) для момента падения тела τ (рис. 4). Из получившегося прямоугольного треугольника легко найдем

$$L\operatorname{tg}\alpha=\frac{g\tau^2}{2},\ \text{и}\ \tau=\sqrt{\frac{2L\operatorname{tg}\alpha}{g}}.$$

Упражнение 5. Тело бросают под углом β к горизонту со склона горы, наклоненной под углом α к горизонту. Тело упало на расстоянии L от места броска. 1) Напишите уравнения движения тела (уравнение (2)) в проекциях на оси 1—5 (рис. 5) для момента падения тела на склон горы. 2) Выберете любые два из этих уравнений и покажите, что оставшиеся можно получить из этих двух. 3) Для каждого из полученных уравнений придумайте задачу, в которой это уравнение сразу приводит к цели.

Задача 2. *На гладкую неподвижную наклонную плоскость с углом*

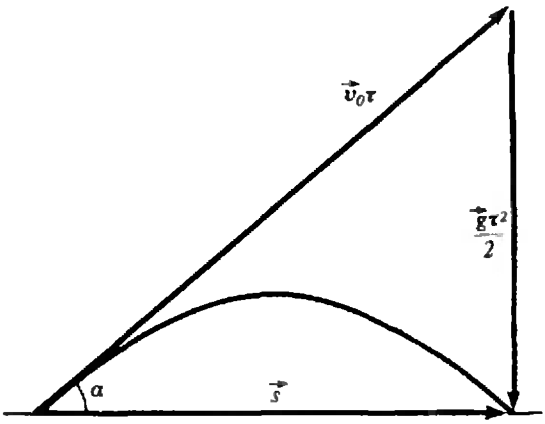


Рис. 4.

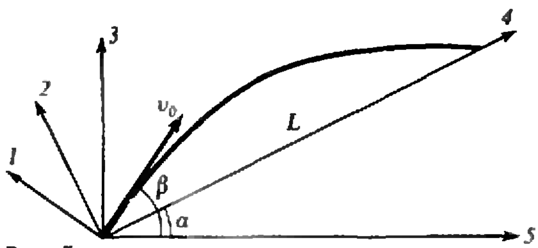


Рис. 5.

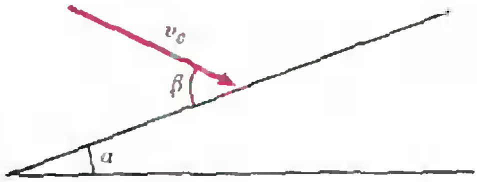


Рис. 6.

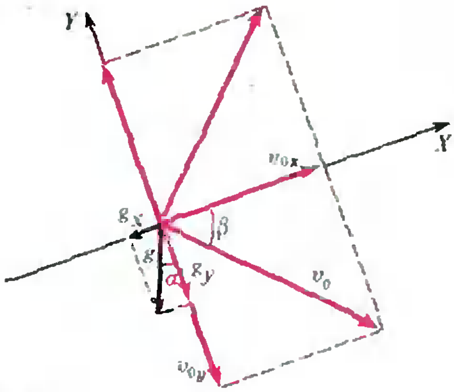


Рис. 7.

наклона α налетает стальной шарик под углом β к плоскости (рис. 6). При каких значениях β шарик сможет вернуться в точку его первого удара о плоскость? Все соударения считать упругими.

Ограничимся одним — наиболее разумным, с нашей точки зрения, решением этой задачи.

Решение. Движение шарика в целом в этом случае не является равноускоренным из-за ударов о плоскость. Однако в промежутках между ударами шарик движется под действием только силы тяжести и, следовательно, равноускоренно. Поэтому для каждого промежутка можно использовать формулы (1) — (3), правда для этого всякий раз нам придется искать начальную скорость.

Как известно, при упругом ударе составляющая скорости шарика, параллельная плоскости, не изменяется, а перпендикулярная плоскости составляющая лишь меняет знак, также не изменяясь по величине. Тогда, зная скорость шарика $\vec{v}_0$ перед первым ударом, найдем скорость после этого удара и подставим ее в формулу (2) для первого участка равноускоренного движения. Затем по формуле (1) найдем скорость шарика перед вторым ударом, и т. д. Другими словами, формулы (1) — (3) плюс условия упругого удара полностью определяют движение шарика.

Осталось только определиться с выбором осей. Если, по традиции, направить оси горизонтально и вертикально, то мы, конечно, выиграем при написании уравнений движения для отдельных участков (так как проекция шарика на горизонтальную ось движется равномерно), но зато очень сложными станут условия отскока шарика. Поэтому направим оси X и Y так, как показано на рисунке 7, и запишем уравнение (2) в проекциях на эти оси:

$$x = v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2},$$

$$y = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2},$$

где

$$v_{0x} = v_0 \cos\beta,\ v_{0y} = v_0 \sin\beta,$$
$$g_x = -g\sin\alpha,\ g_y = -g\cos\alpha.$$

Шарик ударится о плоскость второй раз, когда координата y станет равна нулю (еще одно преимущество выбранных нами осей). Решив уравнение

$$0 = v_{0y}\tau + \frac{g_y \tau^2}{2},$$

найдем, что второй удар произойдет через время

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{-g_y} = \frac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}.$$

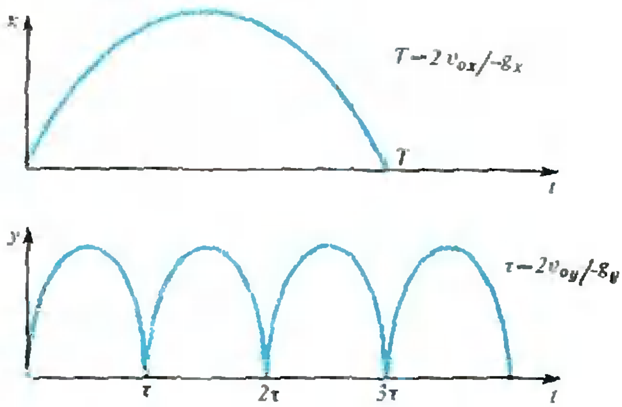


Рис. 8.

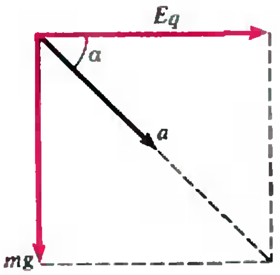


Рис. 9.

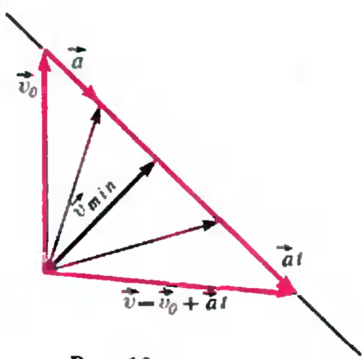


Рис. 10.

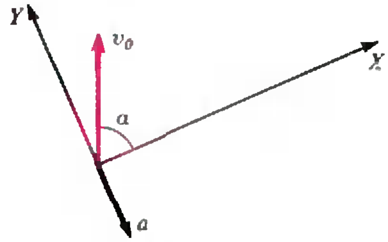


Рис. 11.

Чтобы найти скорость шарика перед вторым ударом (т. е. через время τ), запишем в проекциях на наши оси уравнение (1):

$$v_x = v_{0x} + g_x t,$$
$$v_y = v_{0y} + g_y t.$$

Подставляя $t=\tau=2v_{0y}/(-g_y)$, получим, что перед вторым ударом $v_y=-v_{0y}$ и, следовательно, сразу после удара $v_y=v_{0y}$. Этот результат позволяет облегченно вздохнуть — дальше можно не считать. Так как время между ударами зависит только от v_{0y}, все удары происходят через одинаковое время.

Ответить на вопрос задачи теперь удобнее всего, нарисовав друг под другом графики зависимости координат шарика от времени (рис. 8). Шарик вернется в ту же точку, если в некоторый момент $x=y=0$, что может быть, только если $T=n\tau$, где n — целое число. Итак,

$$\frac{2v_0 \cos\beta}{g \sin\alpha} = n\frac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\beta = n \operatorname{tg}\alpha.$$

Интересно, что при четных и нечетных n шарик ведет себя несколько по-разному. При четных n средний удар шарика (всего ударов $n+1$) происходит перпендикулярно плоскости, и шарик возвращается обратно по той же траектории. Если же n нечетно, то после половины ударов шарик летит вертикально вверх, падает обратно и также возвращается, повторяя весь пройденный путь.

Задача 3. *В область пространства, где создано горизонтальное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, запускают шарик, масса которого m, а заряд q, со скоростью $\vec{v}_0$, направленной вертикально вверх. Какова минимальная скорость шарика в процессе движения?*

Вас не удивило присутствие здесь «электрической» задачи? Нет? И правильно, эта задача, конечно же, имеет прямое отношение к кинематике.

Обсудим два решения.

Решение 1. На шарик в полете действуют две постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и электрическая сила $\vec{E}q$ (рис. 9). По второму закону Ньютона ускорение шарика постоянно и равно

$$\vec{a} = \frac{\vec{E}q + m\vec{g}}{m}.$$

При этом

$$a = |\vec{a}| = \frac{\sqrt{(Eq)^2+(mg)^2}}{m}.$$

На рисунке 10 показано, как изменяется со временем вектор скорости шарика («нарисована» формула (1)). Ясно, что минимальной скорость будет через время

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{a},$$

и ее величина будет равна

$$v_{min} = v_0\cos\alpha = v_0\frac{Eq}{\sqrt{(Eq)^2+(mg)^2}}.$$

Если вам хочется побольше формул, можно сделать по-другому.

Решение 2. Направим оси координат перпендикулярно и параллельно ускорению (рис. 11) и запишем уравнение (1) в проекциях на эти оси:

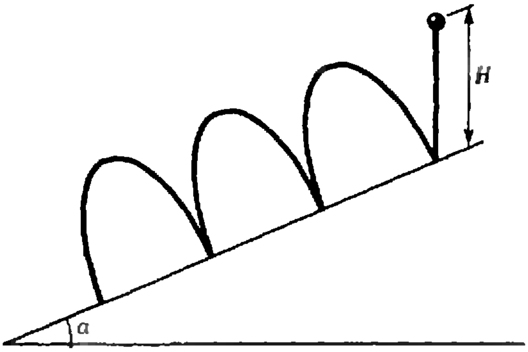


Рис. 12.

$$v_x = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - at.$$

(Сравните со свободным падением тела, брошенного под углом к горизонту.) Так как оси перпендикулярны,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - at)^2}.$$

Так как $(v_0 \sin\alpha - at)^2 \geqslant 0$,

$$v \geqslant v_0 \cos\alpha,$$

и при $t = (v_0 \sin\alpha)/a$

$$v_{min} = v_0 \cos\alpha.$$

Подставляя сюда выражение для $\cos\alpha$, получим прежний ответ.

Если вы располагаете большим количеством свободного времени и чистой бумаги, убедитесь, что при другом выборе осей решение, мягко говоря, проще не становится.

Задачи для самостоятельной работы

1. Шарик свободно падает с высоты H на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом (рис. 12). Найдите отношение расстояний между точками, в которых подпрыгивающий шарик касается наклонной плоскости. Соударения шарика с плоскостью считать абсолютно упругими.

2. Из миномета ведут стрельбу по объектам, расположенным на склоне горы. На каком расстоянии от миномета будут падать мины, если время их полета τ? Угол наклона горы к горизонту β, миномет стреляет под углом α к горизонту.

3. Со стола высотой H сбрасывают упругий шарик, сообщая ему некоторую горизонтальную скорость. В момент, когда шарик испытывает одно из бесчисленных упругих соударений с полом, с того же стола горизонтально сбрасывают другой шарик, сообщая ему такую скорость, чтобы он столкнулся с первым шариком. На какой высоте произойдет встреча?

4. Электрон влетает в плоский конденсатор, параллельно его пластинам, со скоростью $v_0 = 2\cdot 10^6$ м/с. Найдите модуль скорости электрона в момент его вылета из конденсатора. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/м, длина пластин $L = 8$ см, заряд электрона $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1\cdot 10^{-34}$ кг.

Малая и Большая теоремы Ферма

На польской математической олимпиаде 1970-71 гг. предлагалось доказать следующее утверждение об уравнении Ферма: если натуральные числа x, y, z удовлетворяют условию $x^n + y^n = z^n$, то $x \geqslant n$*).

(Напомним, что «Великая теорема» Ферма о том, что таких решений при $n > 2$ не существует, до сих пор не доказана и не опровергнута; легко видеть, что достаточно изучать ее лишь для простых n).

Наш читатель *В. П. Кузнецов* из подмосковного поселка Мамонтовка прислал следующее изящное рассуждение, позволяющее усилить этот результат, а именно, доказать, что если p простое, $p > 3$ и $x^p + y^p = z^p$ для некоторых натуральных x, y, z, то $x > 6p$.

Воспользуемся Малой теоремой Ферма: если p простое, то $a^p - a$ делится на p при любом целом a. Заметим, что если $p > 3$ нечетно, то $a^{p-1} - 1$ делится на $a^2 - 1 = (a-1)\times(a+1)$, так что $a^p - a$ делится на произведение трех последовательных чисел $(a-1)a(a+1)$, а значит, делится на 6; а если $p > 3$ — простое, то 6 взаимно просто с p, следовательно, $a^p - a$ делится на $6p$. Если $x^p + y^p = z^p$, то очевидно $x < z$, $y < z$, $x + y > z$, а выражение $x + y - z = z^p - z - (x^p - x) - (y^p - y)$ должно делиться на $6p$. Поскольку $x + y - z \geqslant 6p$ и $z - y > 0$, получаем $x > 6p$.

*) Это задача 130 из книги С. Страшевича и Е. Бровкина «Польские математические олимпиады». М.: Мир, 1978.

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30°. Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$.

2. Решите уравнение

$$2^{|x-2|\sin x}=(\sqrt{2})^{x|\sin x|}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}\leqslant x.$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2)>z^2-9z+17.$$

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$; $SA=SB=SC=\sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1. Сфера S_2, радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1, касается сферы S_1, плоскостей SAC и ABC. При этом отрезок прямой SB, заключенный внутри сферы S_2, имеет длину $6/\sqrt{7}$. Найдите радиус сферы S_2.

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_{x^2+4}8<1.$$

2. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найдите a_{12}, если $a_{20}=3a_9$.

3. Решите уравнение

$$3\cdot 64^{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-392\cdot 8^{\sin 2x}+16=0.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{9v^2-48v-21}+\sqrt{9v^2-51v-15}\leqslant|3v-6|.$$

5. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{15}/3$. Окружность радиусом $5\sqrt{5}/(3\sqrt{3})$ касается лучей, образующих угол ABC, и вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите тангенс угла ABC, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left|\log_6\left(\frac{x}{36}\right)+\left(\frac{10a+3b+31}{5}\right)x^2-9b^2-9b-1\right|\leqslant\log_6\left(\frac{36}{x}\right)+\left(\frac{10a+3b+41}{5}\right)x^2-(6b+2)x+9b^2+15b+3$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$x^2-4|x|-1=0.$$

2. В равнобедренной трапеции диагональ длины d образует угол α с основанием. Найдите площадь трапеции.

3. Решите уравнение

$$\cos x\cdot\cos 3x=\cos 2x.$$

4. В треугольнике ABC $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $BC=a$, AD — высота. На стороне AB взята точка P так, что $AP/PB=1/2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Найдите радиус этой окружности.

5. Определите, при каких a уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$ имеет решение, и найдите эти решения.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ отрезок AD — высота основания ABC. Конус с вершиной A и образующей AD касается своей боковой поверхностью основания ABC и боковых граней ASC и ASB пирамиды. Известно, что $AD/SD=m$. Найдите

1) отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды;

2) в каких границах может изменяться это отношение при изменении m;

3) при каких m конус не имеет точек, находящихся вне пирамиды.

Вариант 4
(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^x+3\cdot 2^{x+2}=64.$$

2. Решите уравнение

$$2\sin^2 x+\sin^2 2x=\frac{5}{4}-2\cos 2x.$$

3. Вычислите площадь и периметр треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y=a\sin x$ $(a>0)$ в точке $x_0=-\dfrac{4\pi}{3}$.

4. Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн водой за 10 часов. Половину бассейна

первый из них может наполнить за время на 7,5 часов меньшее, чем второй. Первый насос включили в 6 часов, второй — в 8 часов. В 12 часов в бассейне было 400 кубометров воды. Какова емкость бассейна?

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$ и $BC=9$. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей AC и BD основания и равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки E и F лежат на ребрах AB и AD соответственно, $AE=4$, $AF=6$. Найдите площадь многоугольника, полученного при пересечении пирамиды с плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной ребру AS.

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Найдите все решения уравнения
$$3\cos 2x=4-11\cos x.$$

2. Найдите все решения неравенства
$$9^{2x+0.5}-10\cdot 27^{\frac{2}{3}x}>\frac{11}{3}.$$

3. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу выехали грузовой и легковой автомобили. Через 4 часа после начала движения они встретились. После встречи легковой автомобиль, едущий из A в B, увеличил свою скорость на 15 км/ч, а грузовик увеличил свою скорость на 30 км/ч. Определите первоначальную скорость легкового автомобиля, если известно, что он прибыл в пункт B на 1 час раньше, чем грузовик прибыл в пункт A.

4. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN=1$, $MP=6$, $MQ=2$. При этом углы NMP и PMQ равны.
Найдите радиус окружности.

5. Найдите все значения a, b, x, y, z, при которых выполняются соотношения
$$\begin{cases} 1+\operatorname{tg}(bz)\sin^2(xy)+\cos(2xy)\leqslant\\ \leqslant(\cos x+\sin(ay))|\sin(2xy)|,\\ 2+2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)}\cos(b(y+x))+\cos(2b(y+x))=0.\end{cases}$$

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение
$$2-3^{x-2}=8^{x-1}.$$

2. Трактористы A и $Б$ вспахали поле. В первый день они вспахали 1/3 поля, причем A работал 2 часа, а $Б$ — на 1 час больше. Оставшуюся часть поля они вспахали на другой день, при этом A работал 5 часов, а $Б$ — 4,5 часа. За сколько часов работы тракторист $Б$ мог бы вспахать это поле один?

3. В треугольнике ABC сторона AB равна 4, угол A равен 30°, угол B равен 130°. На стороне AB как на диаметре построена окружность. Найдите площадь части круга, лежащей внутри треугольника.

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y=1+4\sin x-2x$$
на отрезке $[0;\pi]$.

5. Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел $2x+1$ и $x+2$ больше -1.

6. Решите неравенство
$$\log_2(2-3x)>4x+1.$$

Вариант 7
(геологический факультет)

1. Решите уравнение
$$\frac{|x|}{x}-x=\frac{x^2}{2}+1.$$

2. Найдите площадь треугольника OMN, образованного на плоскости отрезками прямых OM, ON, MN, где O — начало координат, M — точка пересечения прямых $y=x$, $y=-2x+2$, N — точка пересечения прямой $y=-2x+2$ и оси OX.

3. Решите уравнение
$$1-(2\cos x+\sqrt{3})\operatorname{ctg} x=2\sin x.$$

4. Решите неравенство
$$\frac{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x^{13}}\right)-2}{\log_{125}x^{12}}\leqslant 4-\frac{7}{\log_x 5}.$$

5. Найдите все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение
$$(3x^2-2m^2+mn)^2+(3m^2-mn+2n^2-12x)^2+\\+4=4x-x^2$$
имеет хотя бы одно решение.

6. На стороне BC треугольника BCD выбрана точка E, а на стороне BD — точка F так, что угол BEF равен углу BDC. Площадь круга, описанного около треугольника CFD, в 5 раз меньше площади круга, описанного около треугольника BEF. Отношение площади четырехугольника $CEFD$ к площади треугольника BEF равно 9/16. Угол FDE равен 45°. Найдите угол CED.

Вариант 8
(географический факультет)

1. Решите уравнение
$$\cos^2 6x-\sin^2 3x-1=0.$$

2. Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найдите второй член прогрессии.

3. Решите неравенство
$$\frac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}>1.$$

4. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $AK:KB=2:1$, $BM:MC=1:1$, $AL:LD=1:3$. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(a+1)x^2+(|a+2|-|a+10|)x+a=5$$
имеет два различных положительных корня.

Вариант 9
(экономический факультет)

1. Имеют ли общие точки область значений функции

$$y=\sqrt{3}+2\sqrt{2}x-2x^2$$

и промежуток $[\log_3 15; +\infty)$? Ответ обоснуйте.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|.$$

3. На гипотенузе KM прямоугольного треугольника KLM расположен центр O окружности, которая касается катетов LK и LM в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AK, если известно, что $BM=\frac{23}{16}$, $AK:AC=5:23$ (где C — точка пересечения окружности с KM, лежащая между точками O и M).

4. Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найдите числа a, b и c, если известно, что при указанных условиях сумма $a+b+c$ максимальна.

5. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}\cos(\pi x)+\sin(\pi x)=\sqrt{2},$$

расположенные на отрезке $[-3; 1]$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y+(3+2\sqrt{2})^y-3a=x^2+6x+5, \\ y^2-(a^2-5a+6)x^2=0, \\ -6\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 10
(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{10\cos x}-\sqrt{4\cos x-\cos 2x}=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{x-2}(3x-x^2)\leqslant 2.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CM и высота CH. Найдите отношение $AH:AM$, если $CM:CH=5:4$ и точка H находится между точками A и M.

4. От двух сплавов массами 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определите массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$, а высота пирамиды совпадает с ребром SA. Найдите высоту пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 3, а сторона квадрата $ABCD$ равна 15.

Вариант 11
(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$4\sin^2\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)-2(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cos(2x-\pi)+$$
$$+\sqrt{15}-4=0.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\frac{1}{9}.$$

3. Найдите все решения неравенства

$$\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88-32x}\right)^2\leqslant 1.$$

4. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, а угол CAD равен 60°. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

5. Считая известным, что при любом $a>0$ уравнение

$$2x^3+x^2-x-a-1=0$$

имеет единственный положительный корень x_0 (зависящий от a), найдите все $a>0$, при которых

$$12x_0^3-7x_0>6a+1.$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Два одинаковых шара, между которыми зажата пружина, связаны нитью. Шары бросают без начальной скорости с некоторой высоты так, что при падении центры шаров двигаются по одной вертикали. Через время t после начала падения нить обрывается, пружина разжимается, и шары разлетаются. На какой высоте разорвалась нить, если первый шар упал на землю через время t_1 после разрыва нити, а второй — через время $t_2>t_1$? Время действия пружины на шары после разрыва нити считать малым. Размеры шаров и пружины не учитывать, сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Внутри сферической поверхности находится шайба (рис. 1). Одна поверхность шайбы представляет собой сферу того же радиуса. Коэффициент трения скольжения между шайбой и сферой μ, радиус сферы R. С какой угловой скоростью должны вращаться вокруг вертикальной оси OO' сфера и неподвижная относительно нее шайба, чтобы шайба находилась на высоте h $(h<R)$ от нижней точки сферы? Ускорение свободного падения g. Максимальную силу трения покоя считать равной силе трения скольжения.

3. Длинная однородная деревянная доска плавает в воде, погрузившись на 1/2 своего объема. На один конец доски положили груз, в результате чего этот конец опустился в воду до своего верхнего ребра. Какая часть объема доски будет при этом погружена в воду?

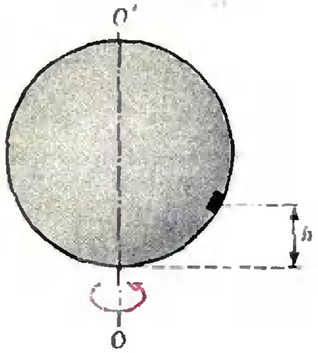


Рис. 1.

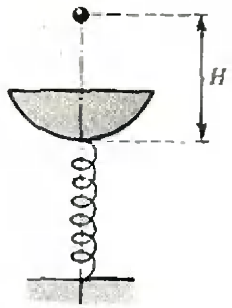


Рис. 2.

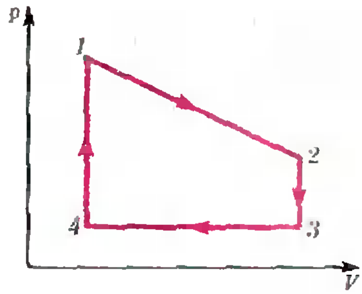


Рис. 3.

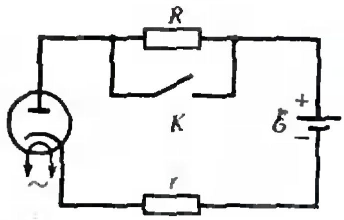


Рис. 4.

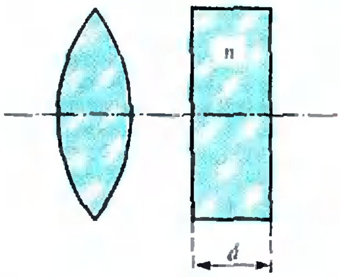


Рис. 5.

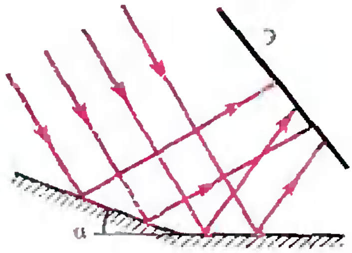


Рис. 6.

4. В середину чашечки, прикрепленной снизу к вертикальной пружине, попадает падающий с высоты H пластилиновый шарик (рис. 2). Масса чашечки M, масса шарика m, жесткость пружины k (пружина невесома), ускорение свободного падения g. На какую максимальную величину отклонится вниз чашечка в процессе колебаний после попадания в нее шарика?

5. Банка цилиндрической формы наполовину заполнена маслом плотностью ϱ. Высота банки L. Закрыв банку пластинкой, ее переворачивают вверх дном и опускают в воду плотностью ϱ_0. На какой глубине находится дно банки, если между дном и маслом в банке имеется слой воздуха высотой d? Атмосферное давление p_0. Температуру считать неизменной. В воде пластинку убирают.

6. Один моль идеального газа изменяет свое состояние согласно циклу, изображенному на диаграмме (рис. 3). Этот цикл состоит из двух изохор, одной изобары и процесса, изображенного на диаграмме прямой, соединяющей точки *1* и *2*. Температуры в состояниях *1, 2, 3, 4* равны, соответственно, T_1, T_2, T_3, T_4. Какую работу совершает газ за один цикл?

7. Вакуумный диод подключен к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}=200$ В через два резистора R и r, согласно схеме, приведенной на рисунке 4. При замкнутом ключе K через диод идет ток $I_0=0{,}2$ А. Какой ток будет идти через диод, если ключ K разомкнуть? Сопротивление резистора R равно $R=1000$ Ом. Для данного диода сила тока пропорциональна разности потенциалов между анодом и катодом U, если $0<U<300$ В.

8. Электрон движется в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях, направленных по оси OZ. В начальный момент электрон пересекает начало координат, двигаясь в направлении оси OX. В каких точках электрон вновь пересечет ось OZ? Напряженность электрического поля E, индукция магнитного поля B, заряд электрона e, масса электрона m.

9. На какое расстояние сместится фокус длиннофокусной собирающей линзы, если на пути прошедших через линзу лучей перпендикулярно к главной оси поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d=6$ см с показателем преломления $n=1{,}5$? Пластинка установлена вплотную к линзе (рис. 5). Диаметр линзы много меньше ее фокусного расстояния.

10. Два плоских зеркала образуют двугранный угол за счет того, что одно зеркало относительно другого повернуто на небольшой угол α (рис. 6). На зеркало падает свет в виде плоской волны с длиной волны λ. На пути отраженных от зеркал волн поставлен экран *Э*, который расположен симметрично по отношению к отраженным волнам. Чему равно расстояние между двумя соседними максимумами в интерференционной картине, наблюдаемой на экране?

Механико-математический факультет

1. Брусок массой $m=0{,}51$ кг, лежащий на горизонтальной плоскости, совершает прямолинейное равноускоренное движение под действием горизонтально направленной силы, равной

$F=5$ Н. Если увеличить массу бруска в $\alpha=2$ раза, то его ускорение под действием той же силы уменьшится в $\beta=3$ раза. Пользуясь этими данными, вычислите коэффициент трения бруска о плоскость. Считайте, что сила трения скольжения не зависит от скорости.

2. Маленький шарик массой $m=10$ г подвешен на нити длиной $l=1,1$ м к бруску массой $M=100$ г (рис. 7). Брусок находится на горизонтальной поверхности и может перемещаться в плоскости рисунка. Придерживая брусок, шарик отклоняют так, что нить образует с вертикалью угол $\alpha=60°$, и отпускают оба тела. Какова скорость бруска в тот момент, когда нить проходит через вертикальное положение? Трение можно не учитывать.

3. Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью (рис. 8). Масса стержня $m=1$ кг, угол его наклона к горизонту $\alpha=45°$. Найдите величину силы реакции шарнира.

4. Кузнечик сидит на одном из концов соломинки длиной $l=50$ см, покоящейся на гладком полу. С какой минимальной относительно пола скоростью он должен прыгнуть, чтобы при приземлении попасть точно на второй конец соломинки? Масса кузнечика в $\beta=3$ раза больше массы соломинки. Размерами кузнечика и трением между полом и соломинкой можно пренебречь.

5. Сосуд, содержащий идеальный газ при температуре $t=27$ °С, снабжен клапаном, открывающимся при перепаде давлений $\Delta p=400$ кПа. Газ нагревают до температуры $t'=127$ °С, при этом часть газа выходит из сосуда через клапан. Какое давление установится в сосуде после охлаждения газа до начальной температуры t? Атмосферное давление $p_0=100$ кПа.

6. Воздух в комнате объемом $V=50$ м^3 имеет температуру $t=27$ °С и относительную влажность $\varphi_1=30$ %. Сколько времени должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\alpha=2$ кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $\varphi_2=70$ %? Давление насыщенных паров воды при $t=27$ °С $p_н=3565$ Па, универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль · К).

7. В схеме, показанной на рисунке 9, напряжение на клеммах источника $U=100$ В, сопротивления в цепи $R_1=101$ Ом и $R=100$ Ом. Определите величину тока, протекающего по проводнику AB. Сопротивлением этого проводника и подводящих проводов, а также внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

8. При подключении к батарее по очереди двух сопротивлений $R_1=1$ Ом и $R_2=4$ Ом оказалось, что выделяющиеся на них мощности одинаковы. Чему равно внутреннее сопротивление батареи?

9. Цилиндрический сосуд с непрозрачными стенками расположен так, что глаз наблюдателя не видит дна сосуда, но полностью видит образующую цилиндра CD (рис. 10). Высота цилиндра $a=40$ см равна его диаметру. Какой объем воды нужно налить в сосуд, чтобы наблюдатель смог увидеть маленький предмет F, находящийся на расстоянии $b=10$ см от точки D? Коэффициент преломления воды $n=1,3$.

10. На боковую грань равнобедренной призмы с углом при вершине 90° падает перпенди-

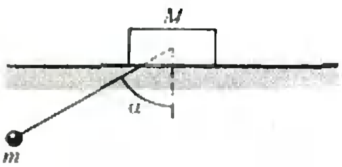


Рис. 7.

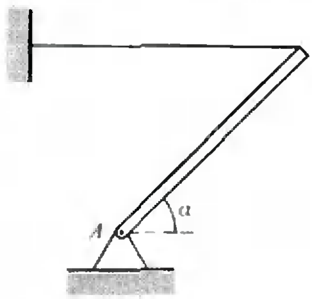


Рис. 8.

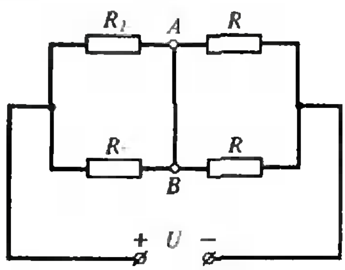


Рис. 9.

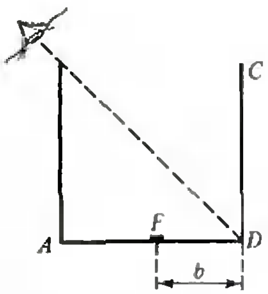


Рис. 10.

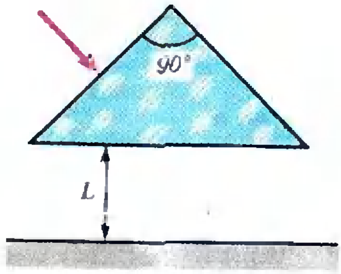


Рис. 11.

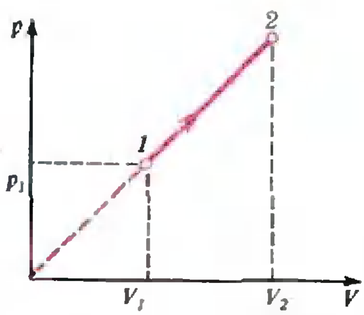


Рис. 12.

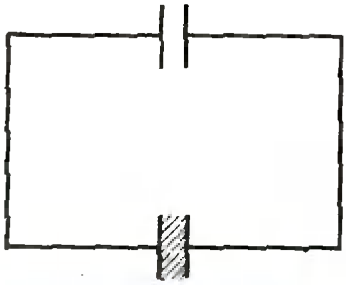


Рис. 13.

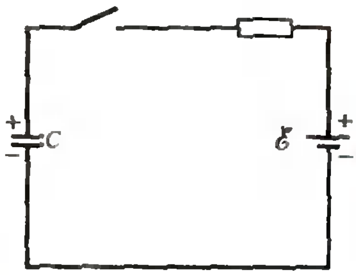


Рис. 14.

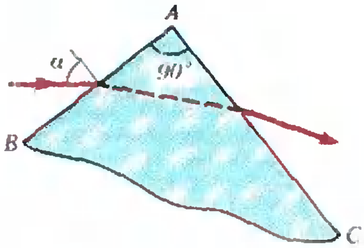


Рис. 15.

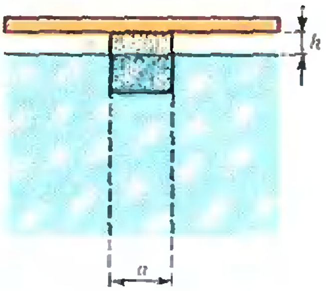


Рис. 16.

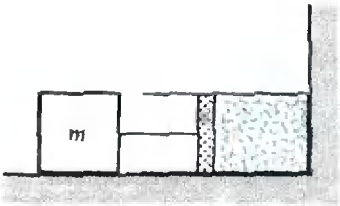


Рис. 17.

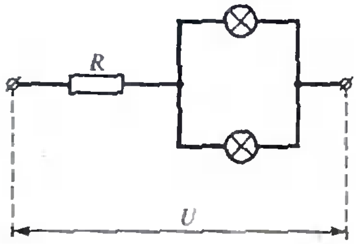


Рис. 18.

кулярно этой грани луч света с длиной волны, для которой показатель преломления призмы $n_1=1{,}1$. После выхода из призмы луч падает на экран, параллельный основанию призмы и находящийся от него на расстоянии $L=10$ см (рис. 11). На какое расстояние сместится луч на экране, если свет будет иметь другую длину волны, для которой показатель преломления призмы $n_2=1{,}2$?

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Маленький шарик падает с высоты $h=50$ см на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha=45°$ с горизонтом. Найдите расстояние между точками первого и второго соударений шарика с плоскостью. Соударения считать абсолютно упругими, сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Маленький шарик, подвешенный на нити длиной $l=1$ м, отклоняют от положения равновесия так, что нить составляет с вертикалью угол $\alpha=60°$, и отпускают без начальной скорости. В момент, когда шарик проходит положение равновесия, нить обрывается. Какой угол составляет с вертикалью скорость шарика в момент его падения на пол, если расстояние от точки подвеса нити до пола $h=2{,}5$ м?

3. Два тела, которые первоначально покоились на гладкой горизонтальной плоскости, расталкиваются зажатой между ними пружиной и начинают двигаться поступательно со скоростями $v_1=3$ м/с и $v_2=1$ м/с. Вычислите, какая энергия была запасена в пружине, если известно, что суммарная масса обоих тел $m=8$ кг, пружина невесома, трение отсутствует.

4. Два сосуда объемами $V_1=2$ л и $V_2=4$ л, заполненные одним и тем же газом, соединены друг с другом трубкой с краном и поддерживаются при постоянной температуре. При закрытом кране давление газа в первом сосуде $p_1=400$ кПа, а во втором $p_2=200$ кПа. На какую величину изменится масса газа в первом сосуде после открывания крана, если первоначальная масса газа в этом сосуде $m_1=18$ г? Объем трубки и крана не учитывать.

5. Найдите количество теплоты, переданное одноатомному газу при переводе его из состояния *1* в состояние *2* (рис. 12). При расчете принять $p_1=500$ кПа, $V_1=2$ л, $V_2=4$ л.

6. Два одинаковых плоских конденсатора, один из которых воздушный, а другой заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, соединены, как показано на рисунке 13, и заряжены до напряжения U_0. Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить диэлектрическую пластинку из конденсатора? Емкость воздушного конденсатора C.

7. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U, разряжается через нагрузочное сопротивление на батарею с ЭДС $\mathscr{E}$ и очень малым внутренним сопротивлением (рис. 14). Какое количество теплоты выделится в нагрузочном сопротивлении после замыкания ключа?

8. Батарея замкнута на некоторое сопротивление. Если параллельно этому сопротивлению присоединить еще одно такое же сопротивление, то мощность, выделяемая во внешней цепи, не изменится. Во сколько раз изменится выделяемая во внешней цепи мощность, если оба сопротивления присоединить к батарее последовательно?

9. Электрический утюг мощностью $P=1$ кВт питается от сети с напряжением $U=220$ В. Утюг включается в сеть с помощью соединительного шнура длиной $L=1{,}5$ м. Каким должен быть диаметр каждого из медных проводов в шнуре, чтобы рассеиваемая на нем мощность не превышала $\eta=0{,}1\ \%$ от мощности утюга? Удельное сопротивление меди $\varrho=1{,}75\times10^{-8}$ Ом·м.

10. Луч света, лежащий в плоскости рисунка 15, падает на боковую грань AB призмы, имеющей при вершине угол 90°. В каких пределах лежат возможные значения угла падения α, если известно, что луч выходит из боковой грани AC? Показатель преломления призмы $n=1{,}25$.

Географический и химический факультеты

1. На Марсе время падения тела, отпущенного без начальной скорости, с некоторой высоты на поверхность планеты в $n=2{,}6$ раз больше времени падения с той же высоты на Земле. Во сколько раз период колебаний математического маятника на Марсе отличается от его периода колебаний на Земле? Сопротивлением атмосферы можно пренебречь.

2. Желоб состоит из двух досок, образующих двугранный угол, у которого ребро горизонтально, а плоскости составляют равные углы $\alpha=30°$ с горизонтом. В желобе лежит цилиндр массой $m=4$ кг, образующая которого параллельна ребру желоба. Какую силу нужно приложить в горизонтальном направлении к основанию цилиндра, чтобы он двигался вдоль желоба равномерно? Коэффициент трения между поверхностями желоба и цилиндра $\mu=0{,}1$.

3. Куб из пенопласта с ребром $a=0{,}5$ м, плывший по водоему, оказался зажатым под досками низкого горизонтального мостка (рис. 16). Какую горизонтальную силу необходимо приложить к кубу, чтобы сдвинуть его поступательно вдоль мостка? Плотность пенопласта $\varrho_п=60$ кг/м^3, плотность воды $\varrho_в=10^3$ кг/м^3, высота мостка над уровнем воды $h=20$ см, коэффициент трения между поверхностью куба и досками мостка $\mu=0{,}3$.

4. В открытой с обоих концов горизонтальной трубке с площадью поперечного сечения $S=10$ см^2 на расстоянии $l=10$ см от одного из ее концов находится поршень. С этого же конца вставляют и начинают вдвигать в трубку другой поршень. При каком расстоянии между поршнями первый поршень сдвинется с места? Сила трения скольжения, действующая на поршень со стороны стенок трубки, $F=100$ Н, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Температуру считать постоянной. Толщиной поршней можно пренебречь.

5. В цилиндре под гладким поршнем площадью $S=5\cdot10^{-4}$ м^2 находится воздух при температуре $T_0=273$ К и давлении $p_0=10^5$ Па, равном атмосферному. Цилиндр лежит на горизонтальной плоскости, упираясь дном в вертикальную стенку (рис. 17). На той же плоскости лежит тело массой $m=5$ кг, соединенное с поршнем горизонтальным стержнем. До какой температуры необходимо нагреть воздух в цилиндре, чтобы тело сдвинулось с места? Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu=0{,}3$.

6. Маленький шарик, обладающий массой $m=1$ г и зарядом $q=10^{-7}$ Кл, подвешен на невесомой нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. При помещении этой системы в однородное вертикальное электрическое поле сила натяжения нити в новом положении равновесия осталась такой же, какой была при отсутствии поля. Найдите величину напряженности поля.

7. Электрон движется в области пространства, где имеются однородное электрическое поле с напряженностью $E=0{,}5\cdot10^3$ В/м и однородное магнитное поле с индукцией $B=10^{-2}$ Тл, причем векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ имеют одинаковое направление. Найдите величину ускорения электрона в тот момент времени, когда его скорость равна $v=10^5$ м/с и составляет угол $\alpha=60°$ с направлением векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Отношение заряда электрона к его массе $e/m=1{,}76\times10^{11}$ Кл/кг.

8. Две одинаковые лампочки мощностью $P=100$ Вт каждая, рассчитанные на напряжение $U_0=127$ В, включены в сеть с напряжением $U=220$ В, как показано на рисунке 18. При каком сопротивлении резистора R лампочки горят в нормальном режиме?

9. На круглом плоском зеркале лежит шар радиусом R от глобуса, касаясь центра зеркала северным полюсом. Каков должен быть минимальный радиус зеркала, чтобы в нем можно было увидеть отражение любой точки северного полушария и части южного полушария до широты $\varphi=30°$?

10. В круглое отверстие в непрозрачном экране вставлена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F=10$ см, на которую падает пучок световых лучей, параллельных ее главной оптической оси. На расстоянии $l=30$ см от линзы параллельно плоскости линзы расположен экран. Какое фокусное расстояние должна иметь собирающая линза, чтобы при замене ею рассеивающей линзы радиус светлого круга на экране не изменился?

Публикацию подготовили Д. Белов, А. Боголюбов, Д. Денисов, М. Потапов, В. Прошкин, В. Серов, Д. Силин, С. Чесноков

Рецензии и библиография

Прочтите интересную книгу

Недалеко от моего дома — киоск «Академкниги». Проходя мимо него, я останавливаюсь и просматриваю выставленные издания. Сколько интересных научно-популярных книг выпускается! К сожалению, нет возможности прочесть все. Приходится строго отбирать. Но и при самом строгом отборе дома накапливаются купленные, но непрочитанные книги. «Ничего,— успокаиваю я себя,— вот освобожусь и обязательно прочту.» И действительно: давненько купленная книга о чем-либо интересном, но знакомом только понаслышке, попадается под руку в более или менее свободное время и несколько дней служит основным чтением. В результате без больших усилий становишься «специалистом» в далекой от своей специальности области. Конечно, нельзя стать настоящим специалистом, читая только научно-популярные книги. Но можно узнать много интересного, особенно если написана книга специалистом без кавычек!

Среди научно-популярных книг есть такие, которые я покупаю без колебаний — каждую новую книжку «Библиотечки «Квант». Иногда, правда, мне дарит книжку автор. Почти все, и купленные, и подаренные, я прочитываю. И должен сказать, очень много получаю от чтения этих книг.

Физика (чтобы быть честным, признаюсь, что в «Библиотечке «Квант» я читаю книги по физике, по математике — совсем редко) стала такой огромной, такой разнообразной наукой, что знать ее всю профессионально — невозможно. А познакомиться с далекими областями хочется. И помочь в этом могут книжки из «Библиотечки «Квант».

Иногда, глядя на витрину киоска, мне становится грустно: глаз отмечает «постаревшие» книжки со знаменитым листом Мёбиуса на обложке. Почему они застоялись? Бо́льшую их часть я знаю — это интересные книжки. Какую помощь они могли бы оказать учителю, лектору вуза, с каким удовольствием были бы прочитаны школьником, если бы кто-нибудь посоветовал ему эти книжки прочесть. «Слишком много напечатали»,— скажет критически настроенный читатель. Что значит «много»? Кажется, тираж ни одной книжки из «Библиотечки «Квант» не превысил количества школ в нашей стране. А ведь каждая книжка — это замечательное пособие для кружковой работы. Очень советую: пусть в каждой школе будет «Библиотечка «Квант». Думаю, если моему совету последуют, заметно повысится уровень знаний по физике и математике у выпускников наших школ. А главное, какое-то число способных ребят не загубят своих способностей — их встреча с физикой и математикой состоится...

* * *

Книжку из «Библиотечки «Квант», о которой пойдет речь — «Физика в мире полимеров», мне подарили ее авторы — доктора физико-математических наук Александр Юльевич Гросберг и Алексей Ремович Хохлов. Мы в «родстве»: они, как и я, ученики академика Ильи Михайловича Лифшица. И о своем учителе помнят. В книге есть статья-послесловие «Физика полимеров и биофизика в творчестве Ильи Михайловича Лифшица». В ней они говорят не только о содержательной стороне научного творчества И. М. Лифшица, но и о Лифшице-лекторе, Лифшице-учителе, Лифшице-человеке. «...Мы считаем своим долгом вспомнить здесь Илью Михайловича Лифшица (1917—1982), у которого нам посчастливилось учиться и который не только был автором многих излагаемых или упоминаемых в этой книге конкретных научных результатов, но и создал вокруг себя воодушевляющую атмосферу горячего интереса к науке.» Правда, эта цитата не из послесловия, а из предисловия. И заканчивается она словами: «Читателю предстоит теперь судить о нашей попытке воссоздать эту атмосферу в книге».

По-моему, попытка удалась...

* * *

Есть рецензии разных стилей. Цель одних — изложить содержание книги столь подробно и отчетливо, что книгу после рецензии можно вообще не читать. А если читать, то только для ознакомления с опущенными автором рецензии подробностями. Иногда, когда книгу трудно достать, такая рецензия очень важна. Но я хочу, чтобы Вы, дорогой читатель, прочли «Физику в мире полимеров». Поэтому этот стиль здесь неуместен. Тем более неуместен стиль разгромной рецензии — книга мне нравится. Она написана интересно об интересном.

Полимер — молекула, состоящая из огромного числа звеньев. Искусственные полимеры содержат от сотен до десятков тысяч звеньев, а в природных полимерах число звеньев достигает миллиарда (10^9) и даже десяти миллиардов. Уже этот факт делает полимер своеобразнейшим объектом. Например, поведение одной молекулы может описываться в терминах и методами статистической физики, а не механики, а предсказания, полученные на этом пути, оказываются достоверными. В одной молекуле полимера могут происходить фазовые переходы — а ведь это, казалось бы, характерная черта макроскопического объекта...

Для авторов полимер прежде всего физический объект, свойства которого можно объяснить, если понять, как движутся и как взаимодействуют между собой полимеры и их отдельные звенья. Характерная особенность книги — попытка не только рассказать о..., но и объяснить... Для этого авторам приходится обращаться к физике с ее основными законами. В этом смысле очень характерны два небольших параграфа (§ 5.6 «Энтропия» и § 5.7 «Энтропийная упругость идеального газа»), в которых рассказано об энтропии. «... среди подлинных приобретений всех цивилизованных языков за последние 100 лет одно из первых мест, несомненно, принадлежит слову энтропия» — так начинают свой рассказ авторы и аккуратно разъясняют это непростое понятие, не слишком затрудняя читателя математикой.*)

О математике в «Физике в мире полимеров». Конечно, без нее нельзя обойтись. Авторы — физики-теоретики, и это накладывает отпечаток на содержание книги: в ней ничего не говорится о постановке реальных экспериментов, хотя, конечно, описаны и объяснены результаты экспериментов. Физик-теоретик не может обойтись без математических формул, соотношений и, главное, рассуждений, основанных на математических уравнениях и их решении. В маленьком (на одну страничку) остроумном параграфе авторы обещают «делать упор не столько на сами математические формулы и уравнения, сколько на их физический смысл» (§ 4.1 «Математика в физике»). И, надо признаться, выполняют обещание. Даже в приложении «Фрактальная геометрия — новый математический язык». При этом математика отнюдь не забыта. Новому поколению естественников, со школьной скамьи знакомых с компьютерами, будет приятно узнать, какую роль играет вычислительная математика в физике полимеров.

Я не встречал статей, посвященных литературному стилю научно-популярных произведений. По-моему, их попросту нет. А жаль. Ведь об одном и том же и даже на одном и том же уровне можно рассказать по-разному. Можно так «засушить» изложение, что читатель начнет дремать на третьей странице.

А. Гросберг и А. Хохлов написали хорошо читаемую книгу. «Стиль — это человек»,— говорят французы. Именно литературный стиль авторов передает «воодушевляющую атмосферу горячего интереса к науке», которую они ощущали, будучи учениками Ильи Михайловича Лифшица.

Читая «Физику в мире полимеров», я часто завидовал авторам. Я не умею подбирать эпиграфы. А Гросберг и Хохлов — виртуозы. К каждой главе — удивительно подходящий эпиграф и при этом, как правило, остроумный. Один пример: заключительной главе «Полимеры и происхождение жизни» предпосланы две строчки Б. Заходера: «Что мы знаем о лисе? // Ничего. И то не все». А в самой главе — может быть, самое интересное, что есть в книге: как физики пытаются, не выходя за рамки естественной науки, объяснить происхождение жизни.

Очень советую: прочитайте книгу А. Ю. Гросберга и А. Р. Хохлова «Физика в мире полимеров»!

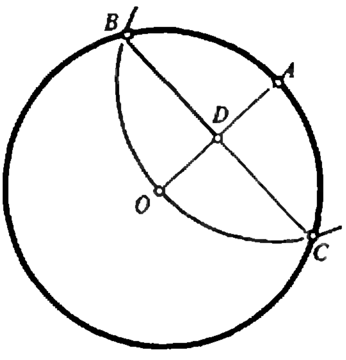
Доктор физико-математических наук, профессор М. Каганов

*) С энтропией любознательный ученик встретится не только в учебнике физики или на уроке. Недавно я наткнулся на статью Евгения Замятина «О литературе, революции, энтропии и прочем» (1923 г.). В ней есть такой пассаж: «Еретики — единственное (горькое) лекарство от энтропии человеческой мысли» (?!). Неплохо было бы, если бы учитель смог объяснить, о чем идет речь. И причем здесь энтропия?..

Разделим окружность на семь частей

Построить правильный семиугольник с помощью циркуля и линейки невозможно. Знаменитая теорема Гаусса утверждает, что можно построить лишь n-угольники при $n=2^m p_1 \dots p_k$, где p_i — простые числа вида $2^{2^q}+1$ для произвольных натуральных q. В таком виде нельзя представить числа 7, 9, 11, 13, 14,..., а значит, правильные многоугольники с таким числом сторон не поддаются построению циркулем и линейкой.

«Квант» рассказывал о построении правильных n-угольников в 1981 году (см. статью А. Савина «Циркулем и линейкой», № 5, с. 34). Несмотря ни на что, наш читатель *Юрий Федотович Жуковский* из поселка Саласпилс Рижского р-на не сдается. Он предлагает замечательный способ приближенного построения равностороннего семиугольника,



который при всей своей простоте дает удивительную точность. Погрешность составляет менее 0,2 %.

Рассмотрим окружность радиуса R. Из точки A на окружности проведем дугу того же радиуса (см. рис.), пересекающую данную окружность в точках B и C. Как известно, отрезки AB и AC равны стороне правильного 6-угольника. Пусть D — точка пересечения отрезков BC и AO. Тогда длина отрезка BD почти не отличается от длины стороны правильного 7-угольника. С помощью микрокалькулятора легко вычислить: $BD=R\cdot\sin 60^\circ \approx \approx 0{,}86602R$, а сторона 7-угольника приблизительно равна $0{,}86776R$.

Как видите, расхождение только в третьем знаке!

Ответы, указания, решения [redacted]

[redacted]внение касательной к графику функции

1. $\left(2;\ 2\frac{2}{3}\right)$; $\left(3;\ 3\frac{1}{2}\right)$.
2. $135°$.
3. $y=x^2+2x-3$.
4. $y=2x-4$; $y=6x-16$.
5. 6 кв. ед.
6. $y=8x+4$.

[redacted]орные уравнения в кинематике
[redacted]жнение 5

1) Для оси *1*: $-L\sin(\beta-\alpha)=-g\cos\beta\cdot\tau^2/2$;
для оси *2*: $0=v_0\sin(\beta-\alpha)\cdot\tau-g\cos\alpha\cdot\tau^2/2$;
для оси *3*: $L\sin\alpha=v_0\sin\beta\cdot\tau-g\tau^2/2$;
для оси *4*: $L=v_0\cos(\beta-\alpha)\cdot\tau-g\sin\alpha\,\tau^2/2$;
для оси *5*: $L\cos\alpha=v_0\cos\beta\tau$.

[redacted]чи для самостоятельной работы

1. $l_1:l_2:l_3:\ldots=1:2:3:\ldots$
2. $L=g\tau^2\cos\alpha/(2\sin(\alpha-\beta))$.
3. $h=3/4H$.
4. $v=\sqrt{v_0^2+(EeL/(mv_0))^2}=2{,}1\cdot10^6$ м/с.

[redacted]ковский государственный [redacted]ерситет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $\frac{3}{2}(3\sqrt{3}-4)$. Указание. Существуют два треугольника ABC с данными сторонами AC, BC и углом B (рис. 1). Только у одного из них высота, проведенная из вершины A, меньше $1/\sqrt{2}$.

2. $4/3$; πk, $k\in Z$.

3. $[-2;\ -1)\cup[0;\ 1]$. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt{x^2+x+1},\\ x>-1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}\geqslant\sqrt{x^2+x+1},\\ x<-1.\end{cases}$$

4. 0, $2\sin 1$. Указание. Левая часть уравнения — четная функция от x. Поэтому если x_0 — корень этого уравнения, то $-x_0$ — также его корень, так что *единственным* корнем может быть лишь $x_0=0$. Подставляя $x_0=0$, получим $a^2-2a\sin 1=0$, т. е. либо $a=0$, либо $a=2\sin 1$. Осталось убедиться, что при этих значениях a уравнение действительно имеет единственный корень.

5. $x=5$, $y=4$, $z=4$. Указание. Сумма выражений, стоящих под знаками логарифма, равна 3, откуда следует, что все они равны по 1. Для z при этом получается неравенство $z^2-9z+17<0$, которому удовлетворяют четыре целых значения z — это 3, 4, 5, 6. Числа x и y окажутся целыми лишь при $z=4$.

6. $1/\sqrt{3}$, $19/(25\sqrt{3})$. Пусть O — проекция вершины S пирамиды на плоскость основания ABC, $SD\perp AC$, тогда $BD\perp AC$ и точка O лежит на BD (рис. 2). По теореме Пифагора находим $BD=3$, $OD=1$, $SD=2$, так что двугранный угол с ребром $A'C$ равен 60°. Центры O_1 и O_2 сфер S_1 и S_2 лежат на биссекторной плоскости этого угла. Вместе с точками P_1 и P_2 касания сфер с плоскостью ABC их центры образуют плоскость P_2O_2P, перпендикулярную ABC. Обозначим через R радиус сферы S_1. Тогда $O_1P_1=R$, $O_2P_2=3R$, $O_1O_2=4R$, и, следовательно, $\angle O_2PP_2=30°$. Это означает, что плоскость O_2PP_2 перпендикулярна AC. Точка P_1 лежит на биссектрисе CK угла ACB, поэтому P_2 лежит на стороне BC ($PP_1/PP_2=1/3$).

Пусть O_2' и P_2' — проекции точек O_2 и P_2 на плоскость BSD, M и N — точки пересечения сферы S_2 с прямой SB, тогда

$O_2'P_2'=MO_2=NO_2=3R$, $O_2O_2'=DP=$

$$=\left|\frac{1}{2}AC-PC\right|=|\sqrt{3}-3R|,\ DP_2'=PP_2=3\sqrt{3}R,$$

$$MO_2'=NO_2'=\sqrt{9R^2-(\sqrt{3}-3R)^2}.$$

Теперь в треугольнике BSD (рис. 3) найдем расстояние $O_2'K$ от точки O_2' до прямой BS. Обозначим через α угол SBD, через β угол $O_2'BD$, тогда

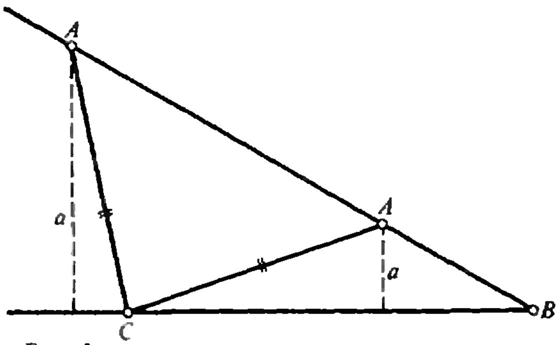


Рис. 1.

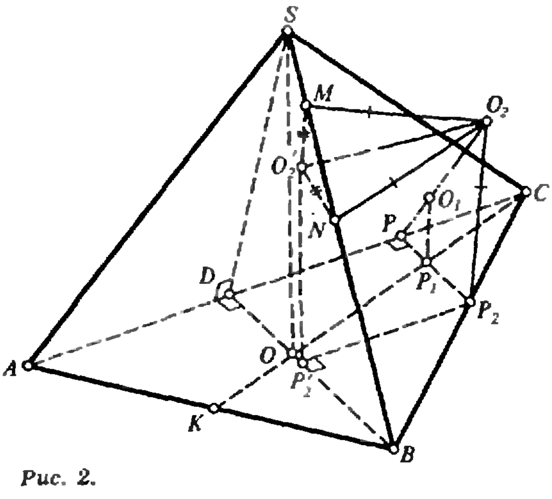


Рис. 2.

$\angle SBO_2' = |\alpha-\beta|$, $KO_2' = BO_2' \sin \angle SBO_2' = BO_2' \sin|\alpha-\beta|$.

Но

$$\sin\alpha = SO/SB = \sqrt{3}/\sqrt{7},\ \cos\alpha = 2/\sqrt{7},$$
$$\sin\beta = O_2'P_2'/BO_2' = 3R/BO_2',$$
$$\cos\beta = BP_2'/BO_2' = (3-3\sqrt{3}R)/BO_2',$$

поэтому

$$KO_2' = |(3-3\sqrt{3}R)\sqrt{3}/\sqrt{7} - 3R\cdot 2/\sqrt{7}|.$$

Выразив, наконец, MN через R, получим уравнение

$$\frac{6}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{(3R)^2-(\sqrt{3}-3R)^2-\frac{1}{7}(6R-\sqrt{3}(3-3\sqrt{3}R))^2},$$

которое имеет три решения:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ R_2 = \frac{19}{25\sqrt{3}},\ R_3 = \frac{19}{\sqrt{3}},$$

из которых всем условиям задачи удовлетворяют лишь первые два.

Вариант 2

1. $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$.
2. 17.
3. $\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

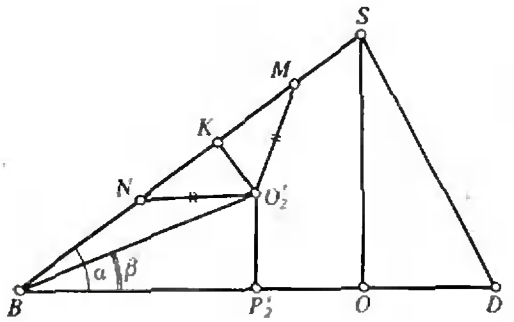


Рис. 3.

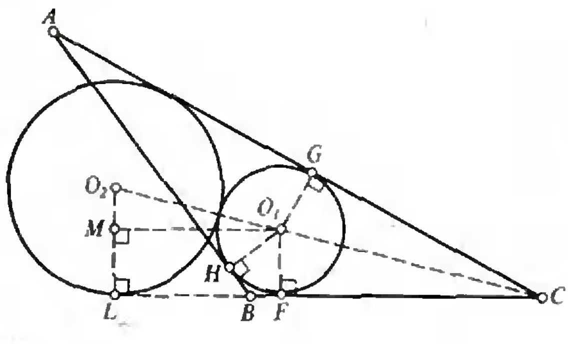


Рис. 4.

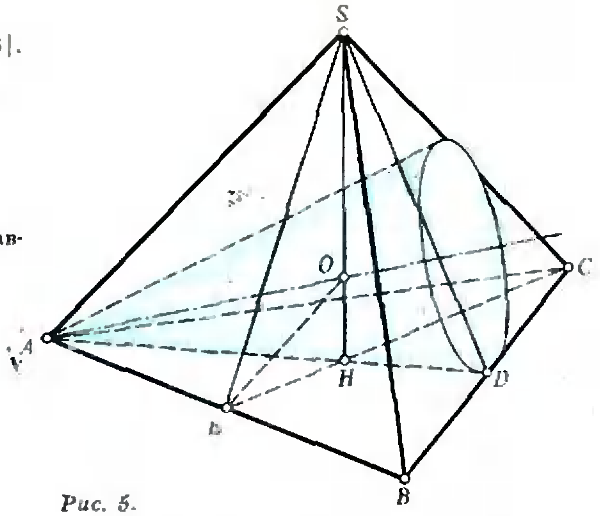


Рис. 5.

4. $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9};\ \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\cup\left[\frac{17+\sqrt{349}}{6};\ \frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

Указание. Пусть $x=9v^2-48v-21$, $y=9v^2-51v-15$. Тогда данное неравенство перепишется так: $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant|x-y|$, или $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\geqslant 1$. После преобразований придем к неравенству $2(x+y)\leqslant 1+(x-y)^2$.

5. $-\sqrt{15}$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Тогда (рис. 4) $\sin\frac{C}{2}=\frac{O_2M}{O_2O_1}=\frac{1}{4}$, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{15}$, $FC=GC=5$. Периметр треугольника ABC находится по формуле $P=2S/r=18$. Пусть $AG=AH=x$. Тогда $AB=4$, $AC=x+5$, $BC=9-x$, а так как $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}(x-5)(x-9)\times$ $\times\sin C$, получаем уравнение x^2-4x+3, причем нас устраивает больший корень $x=3$. Остальное ясно.

6. $a\geqslant-7/2$. Указание. Данное неравенство имеет вид $|u|\leqslant v$ и поэтому эквивалентно системе $-v\leqslant u\leqslant v$, или системе

$$\begin{cases} v-u\geqslant 0,\\ v+u\geqslant 0.\end{cases}$$

Первое из этих неравенств дает

$$\log_6 x - x^2+(3b+1)x+(3b+2)^2\geqslant 0$$

и, в силу неравенств

$$\log_6 x < x\leqslant x^2-(3b+1)x+(3b+2)^2,$$

справедливо при всех $x>0$.

Второе из неравенств системы приводится к виду

$$\frac{10a+3b+36}{5}x^2-(3b+1)x+3b+1\geqslant 0 \qquad (*)$$

и при $b=-1/3$ получим $(2a+7)x^2\geqslant 0$. Поэтому $a\geqslant-7/2$. При $a\geqslant-7/2$ неравенство (*) имеет решение $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ при любом b.

Вариант 3

1. $\pm(2+\sqrt{5})$.
2. $(d^2\sin 2\alpha)/2$.
3. $\pi n/3$, $n\in Z$.
4. $a\sin(\alpha+\beta)(1+3\sin^2\beta)/12\sin\alpha\sin\beta$.

Указание. Пусть O — центр данной окружности. Применив теорему синусов для треугольника ABC, найдите AB, AD, AP, а затем запишите теорему косинусов для треугольника APO.

5. $3-\sqrt{a+5}$ при $a>-4$, $a\neq-1$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+a=(2-x)^2, \\ -\frac{a}{2}<x<2, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

6. 1) $\pi\sqrt{\frac{3-m}{5+m}}$; 2) $\left(0;\pi\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$; 3) $0<m\leqslant 1$.

Указание. 1) Ось конуса лежит на линии пересечения биссекторных плоскостей трехгранного угла с вершиной A (рис. 5). Пусть H — основание высоты, а SE — апофема пирамиды $SABC$, EO — биссектриса угла SEH. Если $AD>SD$ (т. е. при $m>1$), то часть конуса лежит *вне* пирамиды (как на рис. 5).

Пусть $AD=h$, $SD=k$. По условию $\frac{h}{k}=m$. Кроме того, $EH=h/3$. Пусть $OH=x$, $OS=y$. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{x}{y}=\frac{h}{3k}$, а по теореме Пифагора $x+y=\sqrt{k^2-\frac{h}{9}}$.

Мы получим систему уравнений, из которой находим x и y. Положив далее $\alpha=\angle OAH$, получим, что $\sin\alpha=\frac{OH}{AO}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3-m}{5+m}}$, после чего находим радиус основания и высоту конуса. Дальнейшее ясно.

2) Из решения первого пункта видно, что $0<m<3$, причем на промежутке $(0;3)$ функция $\frac{3-m}{5+m}=1+\frac{8}{m+5}$ убывает.

3) Конус целиком «сидит» внутри пирамиды, если угол γ между образующей конуса и его основанием меньше угла β наклона апофемы пирамиды к плоскости ее основания, т. е. при условии $\operatorname{tg}\gamma\leqslant\operatorname{tg}\beta$.

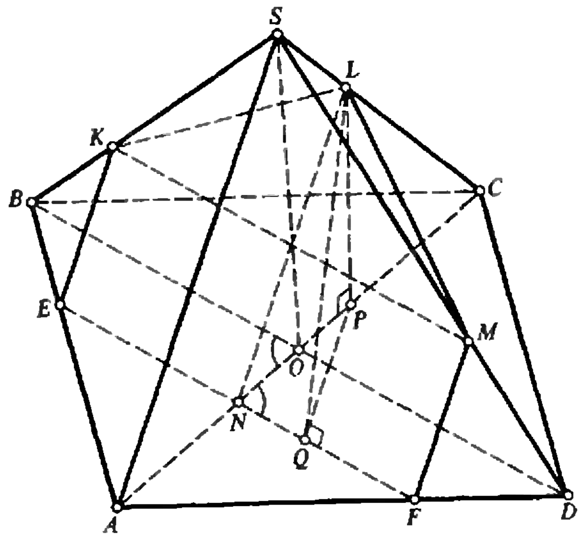


Рис. 6.

Вариант 4

1. 2. 2. $\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$, $k\in Z$.

3. $S=\frac{a}{4}\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)^2$,

$P=\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\left(1+\frac{a}{2}+\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}\right)$.

Указание. Уравнение касательной в точке $x_0=-\frac{4\pi}{3}$ имеет вид $y=-\frac{a}{2}\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{a\sqrt{3}}{2}$, так что требуется найти площадь прямоугольного треугольника OXY, где X и Y — точки пересечения этой касательной с осями координат.

4. 750 м^3.

5. $3\sqrt{183}/2$. Указание. Фигура сечения — это пятиугольник $EKLMF$ такой, что $EK\parallel FM\parallel ML\parallel SA$ (рис. 6). Пользуясь теоремой Пифагора и свойствами подобных треугольников, получим $SA=SB=SC=SD=6$, $EF=2\sqrt{13}$ $EK=FM=\frac{1}{3}SA=2$, $LN=LC=\frac{2}{3}AS=4$.

Пятиугольник $EKSMF$ состоит из параллелограмма $EKMF$ и треугольника KSM, высоты которых равны $\frac{1}{2}LQ$ ($LQ\perp EF$). Чтобы найти LQ воспользуйтесь тем, что $LQ=\sqrt{LP^2+PQ^2}$.

Вариант 5

1. $\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$, $k\in Z$.
2. $\left(\frac{1}{2}\log_3\frac{11}{3};\infty\right)$.
3. 45 км/ч.
4. $2\sqrt{34/15}$. Указание. Пусть MK — диаметр окружности (рис. 7). Точки P и N находятся по одну сторону от MK, поскольку $\angle KMN>\angle KMQ$, а PM — биссектриса угла NMQ. Пусть r — радиус окружности. Тогда

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2r}, \\ \cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{r}, \\ \cos\beta=\frac{3}{r}. \end{cases}$$

5. $a=4\pi k\frac{1+4m}{1+2n}$; $b=2\pi k\frac{8l\pm3}{16\pi k^2+2n+1}$; $x=2\pi k$; $y=\frac{1+2n}{8k}$;

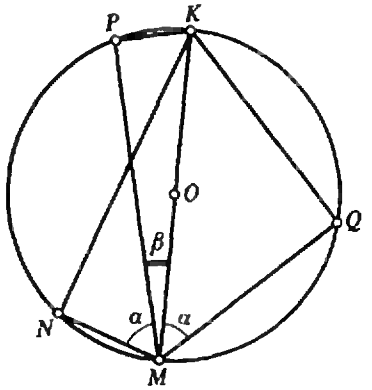


Рис. 7.

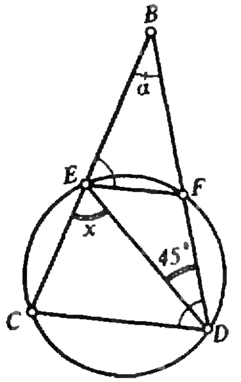


Рис. 8.

$z=\dfrac{16\pi k^2+2n+1}{2\pi k(8l\pm 3)}(\operatorname{arctg} 2+\pi r)$;
$k,\ l,\ m,\ n,\ r\in Z,\ k\neq 0.$

Указание. В уравнении данной системы выполните замену $t=\cos b(x+y)$. Из условия неотрицательности дискриминанта получите неравенство $\operatorname{tg} bz\geqslant 0$. С учетом этого неравенства правая часть неравенства системы из условия не больше, а левая не меньше 2. Поэтому исходная система эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases}1+\operatorname{tg} bz\cdot\sin^2 xy+\cos 2xy=2,\\(\cos x+\sin ay)\cdot\sin 2xy=2,\\2+2\sqrt{\operatorname{tg} bz}\cdot\cos b(x+y)+\cos 2b(x+y)=0,\end{cases}$$

которая, в свою очередь, эквивалентна системе

$$\begin{cases}\operatorname{tg} bz=2,\\\cos x=1,\\\sin ay=1,\\\sin 2xy=1,\\2+2\sqrt{\operatorname{tg} bz}\cdot\cos b(x+y)+\cos 2b(x+y)=0.\end{cases}$$

Вариант 6

1. $2-\log_3 2$.
2. 18 ч.
3. $\sqrt{3}+\dfrac{2\pi}{3}$. Указание. Угол B — тупой. Поэтому искомая площадь равна сумме площадей сектора MOB и треугольника AOM, где M — точка пересечения окружности со стороной AC.
4. $1-2\pi$. 5. $(-3;\ \infty)$.

6. $x<0$. Указание. Левая часть неравенства — убывающая функция, а правая — возрастающая. При $x=0$ левая и правая части равны.

Вариант 7

1. -2. 2. $1/3$.
3. $\pi(12k+5)/6$, $k\in Z$.
4. $(0;\ 1/\sqrt[4]{5}]\cup(1;\ \sqrt[4]{25}]$. Указание. Выполните замену $y=\log_5 x$, после чего приведите неравенство к виду

$$\frac{15y-2}{4y}\leqslant 4-7y.$$

5. $(-2;\ 2),\ (2;\ -2),\ (2\sqrt{2};\ \sqrt{2}),\ (-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$. Указание. Уравнение приведите к виду

$$(3x^2-2m^2+mn)^2+$$
$$+(3m^2-mn+2n^2-12x)^2+(x-2)^2=0,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases}x=2,\\2m^2-mn=12,\\3m^2-mn+2n^2=24.\end{cases}$$

6. Такого угла нет. Указание. Равенство углов BEF и BCD означает, что треугольники BEF и BCD подобны, причем окружность, описанная около треугольника CFD, пройдет через точку E и будет описанной около четырехугольника $CEFD$ (рис. 8). Пусть R_1 — ее радиус, а R_2 — радиус окружности, описанной около треугольника BEF. Поскольку $\dfrac{S_{CEFD}}{S_{BEF}}=\dfrac{9}{16}$, то $\dfrac{S_{BEF}}{S_{BCD}}=\dfrac{16}{25}$, и потому $\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{4}{5}$.

По теореме синусов

$$2R_1=\frac{CD}{\sin x}=\frac{EF}{\sin 45^\circ},$$

следовательно,

$$\sin x=\frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

Из условия следует, что

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

С другой стороны, по теореме синусов $2R_2=\dfrac{EF}{\sin\alpha}$.

Таким образом,

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{CD}{EF}\frac{\sin\alpha}{\sin x}=\sqrt{2}\sin\alpha,$$

откуда $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. С другой стороны, $\sin\alpha=$ $=\sin(x-45^\circ)$, т. е. $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, но тогда $\sin 2x=\dfrac{4}{5}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{3}{5}$, $1-2\sin^2 x=$

$=\pm\frac{3}{5}$, т. е. либо $\sin^2 x=\frac{1}{5}$, либо $\sin^2 x=\frac{4}{5}$. То и другое противоречит равенству $\sin x=\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

Вариант 8

1. $\pi n/3$, $n\in Z$. 2. ± 6. 3. $[1;\ 5)\cup(10;\ \infty)$.
4. 1:6. **Указание.** Пусть S — площадь параллелограмма $ABCD$. Тогда $S_{KBL}=\frac{1}{3}S_{ABL}=\frac{1}{24}S$, а $S_{BLM}=\frac{1}{4}S$.
5. $5<a<7$. **Указание.** Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}ac>0,\\ b^2-4ac>0,\\ ab<0.\end{cases}$$

Вариант 9

1. Имеют.
2. $(-\infty;\ -5/4]\cup\{-1/4\}$.
3. 6/23. **Указание.** Пусть $\alpha=\angle ACK$. Тогда $\angle AKO=\frac{\pi}{2}-2\alpha$, и по теореме синусов $\frac{AK}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$, откуда $10\sin^2\alpha+23\sin\alpha-5=0$, т. е. $\sin\alpha=\frac{1}{5}$. Кроме того, $AK=AQ\operatorname{tg}2\alpha=BO\operatorname{tg}2\alpha=BM\operatorname{tg}^2 2\alpha$.
4. $a=8$, $b=56$, $c=392$. **Указание.** По условию $b=aq$, $c=aq^2$, где a и q — натуральные числа. Из делимости чисел $2240=2^6\cdot5\cdot7$ и $4312=2^3\cdot7^2\cdot11$ на b и c следует, что q может приниматься одно из трех значений 2, 7 или 14.
5. 7/4, 1/4. **Указание.** Пользуясь соотношением $A\sin\alpha+B\cos\alpha=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi)$, убедитесь в том, что левая часть уравнения не больше $\sqrt{2}$ при любых x, причем она равна $\sqrt{2}$ только при $\operatorname{ctg}2\pi x=1$.
6. $a=-1$; $a=2$. **Указание.** Поскольку $3-2\sqrt{2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$, вместе с решением $(x_0;\ y_0)$ системе удовлетворяет также решение $(x_0;\ -y_0)$. Если решение единственно, то $y_0=0$.

Вариант 10

1. $\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$, $k\in Z$.
2. $(2;\ (7+\sqrt{17})/4)$. 3. 2:5. 4. 2,1 кг.
5. 8. **Указание.** Высота h пирамиды находится из равенства $V=\frac{1}{3}rS$, где V — объем пирамиды, S — полная поверхность пирамиды, а r — радиус вписанного шара.

Вариант 11

1. $\frac{\pi}{12}(12k\pm5)$, $k\in Z$.
2. $(0;\ \log_2 3)$.
3. $[-1;\ 2]\cup[3;\ 4]$.
4. $90\sqrt{3}$. **Указание.** Пусть $AO=x$, $DO=y$ (рис. 9), поскольку $\frac{BC}{AD}=\frac{OC}{AO}=\frac{OB}{DO}=\frac{1}{2}$,

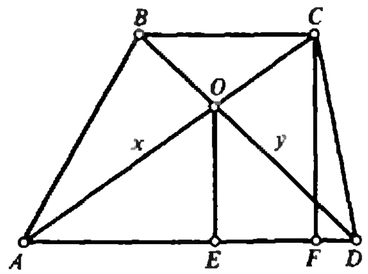


Рис. 9.

получим $BC=8$, $OC=\frac{1}{2}x$, $OB=\frac{1}{2}y$. Далее, $AC+BD=\frac{3}{2}(x+y)=36$. Кроме того, из треугольника DEO, где $EO\perp DE$, имеем $OE^2=OD^2-DE^2$. Но $OE=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $DE=16-AE=16-\frac{1}{2}x$. Поэтому $\frac{3}{4}x^2=y^2-(16-\frac{1}{2}x)^2$. Остальное ясно.
5. $(0;\ \frac{1}{54})$. **Указание.** Поскольку функция $a=f(x)=2x^3+x^2-x-1$ возрастает, необходимо найти решения системы

$$\begin{cases}12x^3-7x>6f(x)+1,\\ x>0;\end{cases}$$

а затем множество положительных значений a при этих значениях x.

Физика

Физический факультет

1. $h=gt_1t_2(4t+t_1+t_2)/(2(t_1+t_2))$.
2. $\omega_{min}\leqslant\omega\leqslant\omega_{max}$, где

$$\omega_{min}=\sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)\sin\alpha}},$$

$$\cos\alpha=\frac{R-h}{R},$$

$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)\sin\alpha}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{(2R-h)h}}{R}$$

(α — угол между радиусом, соединяющим шайбу с центром сферы, и вертикалью).
3. $V_{погр}/V_{доски}=5/8$.
4. $\Delta x_{max}=\frac{mg}{k}+\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{2m^2gH}{k(M+m)}}$,

причем колебания происходят около нового положения равновесия с координатой $x_0=(M+m)g/k$.
5. $H=\frac{p_0}{\rho_0 g}\left(\frac{L}{2d}-1\right)+\frac{L(\rho-\rho_0)}{2\rho_0}-d$.
6. $A=\nu R(T_3-T_4)(T_2T_4-2T_3T_4+T_3T_1)/(2T_3T_4)$.
7. $I=\mathscr{E}I_0/(\mathscr{E}+RI_0)=0{,}1$ А.
8. $z_n=2\pi^2Emn^2/(eB^2)>0$, $n=1, 2, 3, \ldots$

9. $x=d(n-1)/n=2$ см.
10. $\Delta x=\lambda/(2\sin\alpha)$.

Механико-математический факультет

1. $\mu=F(\beta-\alpha)/(mg(\beta-1)\alpha)\approx 0{,}25$.
2. $v=m\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)/(M(m+M))}\approx 31{,}3$ см/с.
3. $F=mg\sqrt{1+(\operatorname{ctg}^2\alpha)/4}\approx 1{,}1$ Н.
4. $v_{\min}=\sqrt{gl/(1+\beta)}\approx 1{,}1$ м/с.
5. $p=(\Delta p-p_0)T/T'=375$ кПа.
6. $\tau=p_н(\varphi_2-\varphi_1)MV/(100\ \%\ \alpha RT)\approx 15{,}5$ мин.
7. $I=U(R_1-R)/((R+3R_1)R)=2{,}5$ мА.
8. $r=\sqrt{R_1R_2}=2$ Ом.
9. $V=\pi a^2b\sqrt{2n^2-1}/(4(\sqrt{2n^2-1}-1))\approx 35{,}7$ л.
10. $l=L\left|\dfrac{n_2}{\sqrt{2-n_2^2}}-\dfrac{n_1}{\sqrt{2-n_1^2}}\right|\approx 3{,}67$ см.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $l=4h(\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\sin^2 2\alpha)/\cos\alpha=$ $=8h\sin 45^\circ\approx 2{,}8$ м.
2. $\beta=\operatorname{arctg}\sqrt{l(1-\cos\alpha)/(h-l)}=30^\circ$.
3. $E_p=mv_1v_2/2=12$ Дж.
4. $\Delta m=m_1-m_1'=m_1(p_1-p_2)V_2/(p_1(V_1+V_2))=$ $=6$ г.
5. $Q=2p_1(V_2^2-V_1^2)/V_1=6$ кДж.
6. $A=CU_0^2(\varepsilon^2-1)/4$.
7. $Q=C(U-\mathscr{E})^2/2$.
8. $k=2(11+6\sqrt{2})/49\approx 0{,}8$.
9. $d=\sqrt{8\rho LP\cdot 100\ \%/(\pi\eta U^2)}\approx 1{,}2$ мм.
10. $\sqrt{n^2-1}<\sin\alpha<1$, $48^\circ 40'<\alpha<90^\circ$.

Географический и химический факультеты

1. $k=n=2{,}6$.
2. $F=\mu mg/\cos\alpha\approx 4{,}5$ Н.
3. $F=\mu ga^2(\rho_в(a-h)-\rho_п a)\approx 198$ Н.
4. $x=l/(1+F/(p_0S))=5$ см.
5. $T=T_0(1+\mu mg/(p_0S))\approx 353$ К.
6. $E=2\,mg/q=2\cdot 10^5$ В/м.
7. $a=(e/m)\sqrt{E^2+(vB\sin\alpha)^2}=1{,}76\cdot 10^{11}$ м/с^2.
8. $R=U_0(U-U_0)/(2P)\approx 59$ Ом.
9. $r_{\min}=R\operatorname{ctg}\varphi=\sqrt{3}\,R$.
10. $F'=Fl/(2F+l)=6$ см.

[redacted]нт» для младших школьников
[redacted]«Квант» № 1)

1. Легко заметить, что согласные — четные цифры. Их в ребусе пять и все они различны, значит, одна из них равна нулю. Но *М*, *С* и *Л* не равны нулю. Если нулю равняется *Н*, то *А*=5, *Х*=4, *М*=2 и *С*=4, что невозможно, поскольку *Х*=*С*, что противоречит условию. Значит, *Х*=0. Отсюда *О*=1, *А*=9, *Н*=8, *М*=2, *С*=4, *У*=3, *Л*=6, т. е. 2309+2309=4618.

2. Запишем теорему Пифагора в таком виде:

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b).$$

Отсюда мы видим, что все три числа не могут быть нечетными, поскольку при нечетных b и c число a четно. Все три числа не могут быть не делящимися на 3. Заметим, что остаток при делении числа на 3 равен 1 или 2. Если у чисел b и c эти остатки равны, то их разность, следовательно, и число a, делится на 3, а если они различны, то их сумма, следовательно, и число a, делится на 3.

3. Пусть на первом острове сидит x_1 аистов, на втором — x_2, на третьем — x_3, на четвертом — x_4 и на пятом — x_5. Заметим, что было съедено не меньше, чем $5x_1+$ $+4x_2+3x_3+2x_4+x_5=(x_1+\ldots+x_5)+x_4+2x_3+$ $+3x_2+4x_1$. Значит, $40\geqslant 30+x_4+2x_3+3x_2+4x_1$, откуда $x_4+2x_3+3x_2+4x_1\leqslant 10$. Это неравенство выполняется в единственном случае, когда $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Тогда $x_5=30-4=26$. Итак, на первом острове один аист, который съел 5 лягушек, на втором — тоже один аист, который съел 4 лягушки, на третьем — один аист, съевший 3 лягушки, на четвертом — один аист, съевший 2 лягушки и на пятом 26 аистов, которые съели 26 лягушек.

4. Шифр устроен следующим образом: цифра указывает номер буквы в слове, которым записывается цвет этой цифры. Например, цвет первой цифры — красный, первая буква этого слова — *К*. Таким образом, мы получим слово *КВАНТ*.

5. Числа, кратные одновременно 2, 3, 4 и 6 — это 12, 24, 36,... Поэтому Женя может жить на 13, 25, 37,... этажах, но из последнего условия задачи следует, что Петя живет непосредственно над Андреем, что возможно лишь в первом случае. Итак, Женя живет на 13 этаже, Вова — на 7, Петя — на 5, Андрей — на 4 и Таня — на 3 этаже.

[redacted]курс «Математика 6—8»
[redacted]*«Квант» № 11 за 1990 г.)*

7. Выигрывает второй игрок. Его стратегия — делать ходы, центрально-симметричные ходам противника. Действительно, квадрат 9×9 содержит 81 клетку. Из них 80 клеток (все, кроме центральной) разбиты на пары центрально-симметричных. (В качестве примера на рисунке 10 изображен случай квадрата 3×3.) В итоге клетки, входящие в пары, разделятся поровну между игроками, а центральная клетка достанется второму.

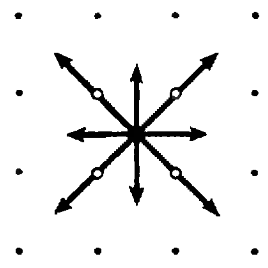


Рис. 10.

8. Решим более общую задачу. Пусть в первой строчке n чисел (в условии $n=1990$). Рассмотрим вторую строчку (длины $n-1$). Возможны два варианта: а) в ней нет ни одного числа, равного -1; б) такое число найдется. В случае а) все числа в первой строке равны -1 (т. к. есть хоть одно), и доказывать нечего. В случае б) рассуждаем так. В первой строке хотя бы одно число равно -1. Значит,

нам достаточно доказать, что в треугольнике, лежащем ниже первой строки (начиная со второй), найдется число, равное -1. Мы получили снова ту же задачу, но для строки меньшей длины и т. д. Таким способом мы каждый раз уменьшаем на 1 длину строки и на n-м шаге доберемся до последней, набрав по дороге n штук минус единиц. Задача решена.

Это поучительное рассуждение, в котором число неизвестных в задаче уменьшается на одно, а ее условие не меняется, называется *математической индукцией*.

9. Ответ: а) нельзя, б) можно.

Для доказательства заметим, что если числа a и b делятся на некоторое число c, то координаты точек $(a-b;\ a)$ и $(a;\ b-a)$ тоже делятся на c.

а) Оба числа 1990 и 3383 делятся на 199 ($3383=199\cdot 17$). Поэтому координаты всех точек, связанных ломаной с точкой (1990; 3383), должны делиться на 199. Но координаты точки (19; 90) не делятся на это число. Следовательно, она не принадлежит ломаной.

б) Для обеих точек (234; 1001) и (611; 7007) наибольший общий делитель их координат равен 13. В самом деле, $234=13\cdot 3^2\cdot 2$, $1001=13\cdot 11\cdot 7$, $611=13\cdot 47$, $7007=13\cdot 11\cdot 7^2$. Разделим все числа на 13 и предъявим ломаную, связывающую точки (18; 77) и (47; 539) (исходные точки связывает ломаная, растянутая в 13 раз). На самом деле, мы обе точки свяжем с точкой (0; 1). После чего точки окажутся связанными между собой.

$$(18;\ 77)\xrightarrow{(a;\ b-4a)}(18;\ 13)\xrightarrow{(a-b;\ a)}(5;\ 13)\to\xrightarrow{(a;\ b-2a)}(5;\ 3)\xrightarrow{(a-b;\ b)}(2;\ 3)\xrightarrow{(a;\ b-a)}(2;\ 1)\to\xrightarrow{(a-2b;\ b)}(0;\ 1).$$

$$(47;\ 539)\xrightarrow{(a;\ b-11a)}(47;\ 22)\xrightarrow{(a-2b;\ b)}(3;\ 22)\to\xrightarrow{(a;\ b-7a)}3;\ 1)\xrightarrow{(a-3b;\ b)}(0;\ 1).$$

Задача решена. Остается заметить, что процедура, которой мы пользовались, называется *алгоритмом Евклида* (в честь великого древнегреческого математика). Его суть проста: от большего из двух чисел мы отнимаем меньшее столько раз, сколько требовалось, чтобы остаток стал меньше вычитаемого. Обычно алгоритм Евклида используют для отыскания наибольшего общего делителя двух чисел.

Поправка

К сожалению, в «Кванте» № 11 за 1990 год на с. 73 в материале «Заочная аэрокосмическая школа» допущены две опечатки. В задаче 11 оказалась пропущенной целая строка, в результате чего фраза, начинающаяся словами «Затем его изохорически охлаждают», получилась лишенной всякого смысла. На самом деле должно быть так: «Затем его изохорически охлаждают до начального давления и, наконец, изобарически сжимают до начального объема».

Формула, приведенная в задаче 12, должна иметь вид

$$p=p_0-p_0LM(T_0-T)/(RT_0^2).$$

Редакция приносит свои извинения читателям.

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров, Л. Кардасевич, В. Овсенко, Т. Петрова, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов, Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров, Л. Тишков, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Е. Тихонова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.11.90. Подписано к печати 17.01.91. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,14. Тираж 94 037 экз. Заказ 2251. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ШАХМАТНО-ДЕМОКРАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

В наше время демократии, когда решения принимаются большинством голосов, И. Акулич из Минска придумал весьма актуальную задачу.

Какое наибольшее число фигур можно расставить на доске так, чтобы каждая из них угрожала:

а) не менее чем половине остальных;

б) не менее чем большинству остальных;

в) не менее чем квалифицированному большинству (т. е. 2/3) остальных?

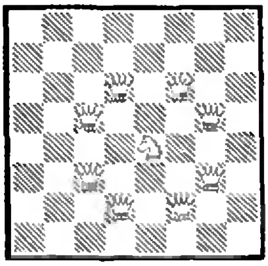
Вот решение задачи, которое приводит И. Акулич.

Поскольку ферзь, поставленный на место ладьи, слона, короля или пешки, держит под обстрелом те же поля и сверх того еще некоторые, достаточно искать решения, в которых используются только ферзи и кони (поля, которым они угрожают, не совпадают).

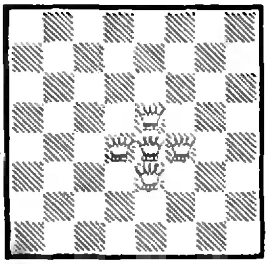
Оценим сверху искомое количество фигур. Пусть они уже расставлены и выполняется одно из условий а) — в). Рассмотрим самую правую фигуру самой нижней горизонтали, на которой имеются фигуры. Если это ферзь, то он может держать под обстрелом не более четырех фигур (слева, сверху, слева-сверху и справа-сверху от себя). Если это конь, то он тоже угрожает не более чем четырем фигурам (ниже рассматриваемой горизонтали фигур нет). Итак, среди фигур искомой расстановки имеется хотя бы одна, которая держит под обстрелом не более четырех фигур. Тогда для случая а) число остальных фигур не более 4, для случая б) — не более 3, для случая в) — не более 2. Поэтому наибольшее число фигур в каждом случае не превышает:

а) $1+4+4=9$;
б) $1+4+3=8$;
в) $1+4+2=7$.

В случаях а) и б) максимумы достигаются. Соответствующая расстановка для а) приведена на диаграмме, для б) достаточно снять в данной позиции коня.



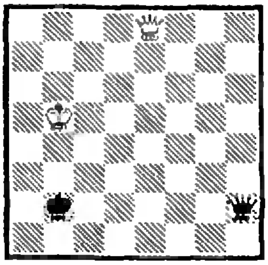
Сложнее обстоит дело со случаем в). Попробуйте сами доказать, что нельзя расставить ни семь, ни шесть фигур так, чтобы удовлетворить условию задачи. А пять фигур расставить можно.



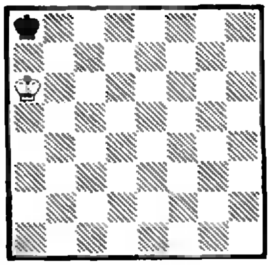
Каждый ферзь здесь угрожает не менее чем $4\times 2/3 = 2{,}66\ldots$ остальных, т. е. условие выполнено.

Из писем читателей

Представьте себе, что каждая сторона имеет на доске по королю и ферзю. Кажется удивительным, но возможна такая ситуация (ее придумал В. Сидоров), в которой ни белый, ни черный ферзи, несмотря на обширные просторы доски, не могут безнаказанно шаховать.



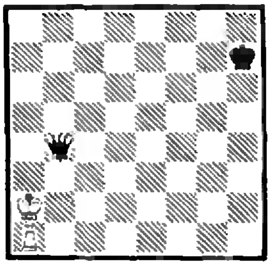
Следующая головоломка принадлежит А. Шурякову.



На какое поле нужно поставить ферзя белых, чтобы они не смогли объявить мат в 1 ход (позиция не должна быть матовой)?

Ответ неожиданный. Такое поле на доске единственное — b8! После 0...Кр:b8 мата в один ход нет, его нет вообще.

В «серийной» задаче (ходят только белые) определенный набор фигур требуется расположить так, чтобы серия ходов, заканчивающаяся матом, была как можно длиннее. В «Кванте» № 5 за 1988 год рассматривались позиции-квартеты и были приведены 22 рекорда. Вскоре один из них был побит семиклассником А. Поповым.



В этой позиции мат дается в 8 ходов вместо семи: **1. Лb1 2. Л:b4 3—7. Крb3—c4—d5—e6—f7 8. Лh4×.**

Многие читатели пытались побить рекорд, но все остальные присланные позиции оказались с браком: мат дается при помощи различных серий ходов, что в серийной задаче запрещено.

Е. Гик

70 коп.
Индекс 70465

В прошлом году в «Кванте» № 3 мы рассказали о том, как сделать из бумаги складную седловидную поверхность, и предложили читателям придумать собственные складные конструкции. Алексей Тукмаков из г. Светлого Калининградской области прислал складную модель шара из двух систем параллельных кругов. Более прочная модель получается, если заменить круги кольцами, как на рисунке внизу. Эта модель не только прочна и в то же время подвижна, но и очень красива. Вы убедитесь в этом сами, если изготовите ее. Определить размеры поможет рисунок справа, показывающий проекцию модели вдоль линий пересечения плоскостей колец.